

THESE

présentée à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité: MATHÉMATIQUES

Mention: INFORMATIQUE

par M. OLIVIER COGIS

Sujet de la thèse: LA DIMENSION FERRERS DES GRAPHS ORIENTES

Soutenue le 3 DECEMBRE 1980 devant la Commission

composée de: Président M. J. VIGNES

Examineurs: MM. C. BENZAKEN

C. BERGE

G. CHATY

M. CHEIN

P. L. HAMMER

B. MONJARDET

J. C. SIMON

THESE

présentée à

L' UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

pour l'obtention du

DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Spécialité: MATHÉMATIQUES

Mention: INFORMATIQUE

par M. OLIVIER COGIS

Sujet de la thèse: LA DIMENSION FERRERS DES GRAPHS ORIENTES

Soutenue le 3 DECEMBRE 1980 devant la Commission

composée de: Président M. J. VIGNES

Examineurs: MM. C. BENZAKEN

C. BERGE

G. CHATY

M. CHEIN

P. L. HAMMER

B. MONJARDET

J. C. SIMON



Pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de constituer le jury de cette thèse, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Messieurs les Professeurs C. Benzaken, C. Berge, G. Chaty, M. Chein, P.L. Hammer, B. Monjardet, J.C. Simon et J. Vignes.

La rédaction de cette thèse doit beaucoup aux multiples conseils et encouragements de M. Chein, et plus généralement à l'existence de l'équipe qu'il anime en compagnie de G. Chaty. Je suis heureux de pouvoir en exprimer ici le témoignage.

J'adresse mes plus vifs remerciements Mesdames A. Angot et M. Le Floch ainsi qu'à Messieurs B. Couvigny, H. Couvreur et Nguyen Van Van dont l'efficacité et la bonne volonté, pourtant parfois soumise à rude épreuve, ont permis la réalisation pratique de ce travail. Mes remerciements vont également à Mesdames N. Silvant et A.M. Thuillier qui m'ont très gentiment apporté leur concours.

SOMMAIRE

CHAPITRE I : Graphes de Ferrers

1 - Les graphes de Ferrers	
A.- Définition et caractérisations des graphes de Ferrers	1
B.- Propriétés élémentaires de la classe des graphes de Ferrers	23
2 - Graphes de Ferrers particuliers	
A.- Les S-graphes de Ferrers	27
B.- Ordres d'intervalle, ordres quasi-forts et quasi-ordres	33
C.- Quelques caractérisations supplémentaires des graphes de Ferrers	36
3 - Graphes de Ferrers minimaux contenant un graphe donné	39

CHAPITRE II : Dimension Ferrers des graphes

1 - Définition de la dimension Ferrers d'un graphe	1
2 - Réduction du problème de la dimension Ferrers à celui de la dimension Ferrers des graphes bipartis. Le B-isomorphisme	5
3 - Quelques propriétés générales de la dimension Ferrers	

A.- Monotonie de d_F relativement à la relation de sous-graphe	9
B.- Conservation de la dimension Ferrers par prolongement	11
C.- Dimension Ferrers d'un produit strict de graphes de Ferrers	12
D.- Une borne élémentaire pour $d_F(G)$ et caractérisation des graphes G tels que $d_F(G) = n(G)$	15
E.- Factorisation de $d_F(G)$ grâce à des notions de connexité	20
4 - Tentative de réduction du problème de la dimension Ferrers à celui de la dimension Ferrers des ordres de hauteur 1	31

CHAPITRE III : F-incompatibilité et F-extensibilité

1 - Les graphes de F-incompatibilité	1
2 - Caractérisation des graphes de dimension Ferrers égale à 2	8
3 - Problèmes relatifs aux graphes de F-incompatibilité et à l'inégalité $d_F(G) \geq \gamma((\bar{G})^*)$	24
4 - Une condition suffisante de F-extensibilité	27

CHAPITRE IV : Dimension Ferrers des graphes transitifs et des pseudo-ordres

1 - Caractérisations spécifiques de la dimension Ferrers des graphes transitifs	1
2 - Relation entre la dimension Ferrers des graphes transitifs et celle de leur fermeture réflexive	4

3 - Factorisation particulière de la dimension Ferrers des graphes transitifs	7
4 - Utilisation du nombre de stabilité pour majorer la dimension Ferrers des graphes transitifs	12
5 - Dimension Ferrers du graphe réduit d'un graphe transitif. Dimension Ferrers des pseudo-ordres	30

CHAPITRE V : Dimension Ferrers et dimension ordre

1 - Une extension de la dimension des ensembles ordonnés	1
2 - Caractérisation de la F-incompatibilité et de la F-extensibilité dans le dual d'un ordre	6
3 - Caractérisations de $d_F(G)$ lorsque G est un ordre	12
4 - Détermination de $\mathcal{F}_n$ pour $n \geq 6$	17

CHAPITRE VI : Graphes à seuil. Dimension à seuil des graphes simples et dimension Ferrers

1 - Graphes de Ferrers symétriques et graphes à seuil	1
2 - Dimension Ferrers des graphes et dimension à seuil des graphes simples	24

INTRODUCTION

La notion de dimension Ferrers des graphes orientés semble avoir été introduite indépendamment dans deux domaines de recherche distincts et à partir de motivations très différentes :

1 - Analyse des questionnaires :

On cherche à analyser les résultats d'une expérience ayant consisté à poser à un certain nombre d'individus un même ensemble de questions à réponses de type "oui-non".

Si, de deux individus quelconques, l'un a toujours répondu "oui" aux questions auxquelles l'autre a répondu "oui", alors, étant données deux questions quelconques, il en est une à laquelle ont répondu "oui" tous les individus qui ont répondu "oui" à l'autre. L. Guttman a mis en évidence, en 1950, ce type particulier de questionnaire, appelé depuis "échelle de Guttman", en montrant qu'on pouvait alors numéroter individus et questions de sorte que les questions auxquelles un individu aura répondu "oui" sont exactement celles portant un numéro inférieur au sien [STO-al].

Un questionnaire réel présentant très rarement cette propriété, différentes notions de "distance" d'un questionnaire à une échelle de Guttman ont été introduites.

L'une des "mesures" utilisées est celle de dimension d'un questionnaire, définie comme le plus petit nombre d'échelles de Guttman dont le questionnaire est l'intersection (si la dimension d'un questionnaire est égale à k , on peut définir k numérotations des individus et des questions de sorte que les questions auxquelles un individu aura répondu "oui" sont exactement celles qu'il "domine" simultanément selon les k numérotations; l'expérimentateur pourra interpréter la dimension comme la mise en évidence de la présence de k facteurs rendant compte de l'expérience).

2 - Etude des ensembles ordonnés :

En 1941, utilisant un résultat dû à E. Szpilrain (1930) [SZP], B. Dushnick et E.W. Miller ont montré que tout ordre (partiel) est l'intersection des ordres totaux qui le contiennent, et ils ont proposé d'appeler dimension d'un ordre le plus petit nombre d'ordres totaux dont il est l'intersection [DUS-MIL] (nous appellerons parfois cette notion de dimension la dimension ordre; elle a notamment été étudiée par G. Birkhoff, H. Kohn, O. Ore, T. Hiraguchi, W.T. Trotter Jr.,...).

Utilisant la notion de relation de Ferrers introduite par J. Riguet en 1951 (ce sont les relations R telles que $R(R^d)R \subseteq R$, où R^d , la duale de R , désigne la relation réciproque de la complémentaire de R [RIG]), A. Bouchet a établi

en 1971 un théorème d'extension ("tout ordre est l'intersection de k ordres totaux ssi il est l'intersection de k relations de Ferrers") et il a alors proposé d'appeler dimension d'une relation binaire le plus petit nombre de relations de Ferrers dont elle est l'intersection [BOU].

$$\begin{array}{cc} X & X \\ & X \end{array}$$

Du fait de l'équivalence des notions d'échelle de Guttman et de relation de Ferrers, les deux notions de dimension évoquées ci-dessus sont équivalentes (dimension d'un questionnaire, dimension d'une relation binaire.

C'est cette notion que nous désignons sous le titre de dimension Ferrers des graphes orientés (le formalisme de la théorie des graphes étant mieux adapté à la nature des résultats que nous exposons ainsi qu'au contexte dans lequel nous les situons⁽¹⁾) et dont l'étude se justifie à plusieurs titres :

- 1) le concept de dimension Ferrers n'a encore fait l'objet d'aucun développement systématique (du moins à notre connaissance).

(1): nous dirons graphe pour graphe orienté et graphe simple pour graphe non orienté, sans boucles ni arêtes multiples.

- 2) le concept de dimension ordre a suscité de très nombreux travaux et ce domaine de recherche reste très actif; le théorème d'extension de A. Bouchet permet de jeter un éclairage nouveau sur cette théorie.
- 3) le praticien désire pouvoir disposer d'algorithmes déterminant la dimension Ferrers d'un graphe.

Or cette dernière préoccupation renvoie également à la première dans la mesure où on ne connaît pas d'algorithme efficace pour résoudre le problème (en particulier, on a tenté sans succès jusqu'à présent, de classer du point de vue de la théorie de la complexité des algorithmes, le problème de la dimension d'un ensemble ordonné⁽¹⁾).

Ainsi, des motivations d'ordre aussi bien théorique que pratique ont fondé notre conviction qu'un développement du concept de dimension Ferrers en tant que tel est un travail utile dans le contexte actuel. Nous nous sommes attachés à faire les premiers pas dans cette direction.

X

X

X

(1): le problème est manifestement NP; mais on ignore s'il est polynômial, s'il est NP-complet.

Les résultats que nous présentons dans cette thèse peuvent s'exprimer selon les axes suivants :

1 - Etude de la notion de graphe de Ferrers

Ce concept n'a pratiquement pas été développé, sauf en ce qui concerne les caractérisations des graphes de Ferrers (variées, suivant les auteurs déjà cités, auxquels nous adjoignons A. Ducamp et J.C. Falmagne [DUC-FAL]).

Nous ajoutons de nouvelles caractérisations à celles déjà connues que nous rappelons⁽¹⁾ (cf. thm 1 p. I-5, thm 2 p. I-18 et pté p. I-37) et nous établissons des propriétés fondamentales des graphes de Ferrers minimaux contenant un graphe donné (notamment: "tout graphe de Ferrers minimal contenant un graphe transitif donné est lui-même transitif" — cf. thm 1 p. I-44). Ces résultats jouent un rôle essentiel dans notre étude de la dimension Ferrers.

De plus, nous illustrons l'intérêt propre du concept de graphe de Ferrers:

- en introduisant les S-graphes de Ferrers qui sont des

(1): et que nous redémontrons dans un souci de complétude; il en sera de même des résultats de A. Bouchet relatifs à la dimension Ferrers.

graphes de Ferrers particuliers généralisant les quasi-ordres (ou "semi-orders" d'Halphen-Luce [HAL,LUC]), lesquels ont suscité de très nombreux travaux en analyse des préférences (notamment de D. Scott, P. Suppes, F.S. Roberts, P.C. Fishburn,...; nous montrons que plusieurs des caractérisations connues des quasi-ordres se déduisent immédiatement des caractérisations des S-graphes de Ferrers — cf. thm p. I-29).

- en montrant que les graphes de Ferrers symétriques sont, aux boucles près, les graphes à seuil introduits en 1973 par V. Chvátal et P.L. Hammer⁽¹⁾ [CHV-HAM]; en particulier, les caractérisations connues des graphes à seuil se déduisent de celles des graphes de Ferrers symétriques (cf. thm 1 p. VI-4), et la correspondance graphe à seuil - graphe de Ferrers symétrique est totalement élucidée (cf. thm 3 p. VI-18).

2 - Etude de la dimension Ferrers en tant que telle

- après avoir rappelé la définition de la dimension Ferrers

(1): ce sont les graphes simples dont on peut isoler dans l'espace $\mathbb{R}^n$, si n est l'ordre du graphe, l'ensemble des vecteurs caractéristiques de ses sous-ensembles stables, de celui des vecteurs caractéristiques de ses sous-ensembles non-stables au moyen d'un seul hyperplan.

(sous ses formes équivalentes dues à A. Bouchet — cf. thm p. II-2), nous établissons diverses propriétés générales : réduction polynômiale du problème de la dimension Ferrers des graphes au seul cas des graphes bipartis (à tout graphe on associe "naturellement" un graphe biparti, la correspondance conservant la dimension Ferrers — cf. pté 1 p. II-6), majoration de la dimension Ferrers d'un graphe par son ordre (et résolution du problème extrêmal — cf. pté 3 p. II-17), factorisation de la dimension Ferrers utilisant des notions de simple connexité (cf. section II-3-E p. II-20), dimension d'un produit strict de k graphes de Ferrers (elle est en général égale à k — cf. thm p. II-12).

- nous introduisons les concepts de F -extensibilité et de F -incompatibilité; à tout graphe donné, nous associons un graphe de F -incompatibilité (c'est un graphe simple) de sorte que le nombre chromatique du graphe de F -incompatibilité associé au complémentaire d'un graphe minore sa dimension Ferrers; l'égalité éventuelle de ces deux invariants semble être un problème difficile, et c'est au prix d'une étude approfondie des propriétés des graphes de F -incompatibilité bipartis que nous obtenons une caractérisation des graphes de dimension Ferrers égale à 2 : ce sont les graphes dont le complémentaire admet un graphe de F -incompatibilité biparti

(cf. thm p. III-21; la démonstration constructive de ce résultat met en évidence l'existence d'algorithmes polynômiaux déterminant si un graphe donné est de dimension Ferrers égale à 2 et, dans l'affirmative, qui construisent deux graphes de Ferrers dont il est l'intersection); la notion de F-extensibilité permet une reformulation de la définition de la dimension Ferrers d'un graphe, qui prendra son intérêt dans le cas des graphes transitifs et plus particulièrement des ordres (on retrouvera la caractérisation de la dimension ordre due à W.T. Trotter Jr. et J.I. Moore Jr. [TRO-MOO,b] — cf. cond. (5) du thm 1 p. V-12).

- nous étudions plus particulièrement la dimension Ferrers des graphes transitifs; nous obtenons notamment le résultat fondamental qu'un graphe transitif d'ordre $n \geq 4$ est de dimension Ferrers inférieure ou égale à $\lfloor n/2 \rfloor$ (cf. thm p. IV-27) et nous résolvons le cas extrême; nous montrons également que l'étude de la dimension Ferrers des graphes transitifs se ramène à celle de la dimension Ferrers des graphes transitifs et anti-symétriques (cf. pté 1 p. IV-31) que nous appelons pseudo-ordres.

3 - Liens avec la dimension ordre

- nous donnons une démonstration originale et plus simple du

théorème d'extension de A. Bouchet, et nous montrons que des théorèmes classiques de la théorie de la dimension des ensembles ordonnés (théorèmes dus à O. Ore, T. Hiraguchi, W.T. Trotter Jr. et J.I. Moore Jr., H. Komm, A. Ducamp, R. Kimble — cf. p. V-15,16) s'obtiennent comme conséquences immédiates de certains résultats que nous avons établis comme propriétés générales de la dimension Ferrers (par exemple la célèbre inégalité d'Hiraguchi [HIR] : la dimension ordre d'un ordre à n sommets, $n \geq 4$, est inférieure ou égale à $\lfloor n/2 \rfloor$).

- nous donnons une seconde démonstration originale du théorème d'extension, qui présente l'intérêt fondamental de préciser en un certain sens la nature de cette extension (à tout graphe on associe un ordre, la correspondance transformant la dimension Ferrers du premier en la dimension ordre du second — cf. thm 1 p. V-2); on en déduit en particulier que le problème de la détermination de la dimension Ferrers d'un graphe et celui de la détermination de la dimension ordre d'un ordre sont polynômialement équivalents.

4 - Liens avec la dimension à seuil

La notion de dimension à seuil des graphes simples a été introduite par V. Chvátal et P.L.Hammer en 1973 [CHV-HAM] à propos de l'étude d'un problème de programmation linéaire en

nombres entiers: étant donné un système d'inéquations linéaires booléennes (coefficients et variables à valeur 0-1), déterminer le plus petit nombre d'inéquations pseudo-booléennes (coefficients réels et variables à valeur 0-1) constituant un système équivalent. Ce nombre est précisément la dimension à seuil d'un certain graphe simple associé au système booléen, lorsqu'on définit la dimension à seuil d'un graphe simple comme le plus petit nombre de graphes à seuil dont il est la réunion.

Nous montrons que la théorie de la dimension Ferrers des graphes peut être identifiée à celle de la dimension à seuil des graphes scindés⁽¹⁾ (à tout graphe on associe un graphe scindé, la correspondance transformant la dimension Ferrers du premier en la dimension à seuil du second — cf. thm 3 p. VI-32). Ce résultat est obtenu au moyen d'une transformation montrant en particulier que le problème de la détermination de la dimension Ferrers d'un graphe et celui de la détermination de la dimension à seuil d'un graphe scindé sont polynômialement équivalents

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ & X & \end{array}$$

(1): ce sont les graphes simples dont on peut bi-partitionner l'ensemble des sommets de sorte qu'une des classes engendre une clique et l'autre un stable.

En conclusion, tout en développant ses propres concepts, et résultats, l'étude de la dimension Ferrers des graphes nous a permis:

- 1) d'exprimer dans un cadre plus général un certain nombre de théorèmes classiques de la théorie de la dimension des ensembles ordonnés.
- 2) d'établir un lien jusqu'ici insoupçonné entre deux théories dont les origines sont très éloignées: la théorie de la dimension des ensembles ordonnés peut être assimilée à celle de la dimension à seuil des graphes scindés.
- 3) de résoudre un problème toujours non résolu en théorie de l'analyse des questionnaires: la caractérisation des graphes de dimension Ferrers égale à 2 répond, avec l'existence d'une solution algorithmique polynômiale, à un problème encore posé à un récent congrès de Psychologie Mathématique (J.C. Falmagne, USA, C. Flament, France).

Nous y voyons aujourd'hui la justification a posteriori de notre conviction première de l'intérêt de l'étude du concept de dimension Ferrers des graphes.

Enfin, ce sentiment se trouve renforcé de ce que ce concept,

ainsi que les concepts et problèmes apparus au cours de son étude, nous paraissent susceptibles de développements riches d'enseignement ,

au nombre desquels, par exemple:

- caractérisation des graphes de F-incompatibilité et étude de la complexité algorithmique de la détermination de leur nombre chromatique
- recherche de l'existence, ou non, d'une réduction polynômiale du problème de la détermination de la dimension à seuil des graphes simples au seul cas des graphes scindés (V. Chvátal et P.L. Hammer ont montré que le problème général est NP-difficile)
- caractérisation des graphes transitifs dont la fermeture réflexive a une dimension Ferrers strictement supérieure (généralisation d'un problème posé par R. Kimble en 1973).

X

X

X

CHAPITRE I

GRAPHES DE FERRERS

I - LES GRAPHS DE FERRERS

(A) - Définition et caractérisations des graphes de Ferrers

La présentation, en partie originale, que nous allons donner des graphes de Ferrers nécessite quelques définitions préliminaires.

Soit $G = (X, U)$ un graphe quelconque. Le complémentaire de G est le graphe $\bar{G} = (X, \bar{U})$ où $\bar{U} = \{xy \in X^2; xy \notin U\}$. Le réciroque de G est le graphe $G^- = (X, U^-)$ où $U^- = \{xy \in X^2; yx \in U\}$. On pose $n(G) = |X|$.

On note $\gamma^+(G)$ et $\gamma^-(G)$, ou plus simplement γ^+ et γ^- , les préordres définis sur X par:

$$\forall x, y \in X \quad xy \in \gamma^+ \Leftrightarrow \Gamma_G^+(x) \supseteq \Gamma_G^+(y)$$

$$\forall x, y \in X \quad xy \in \gamma^- \Leftrightarrow \Gamma_G^-(x) \supseteq \Gamma_G^-(y)$$

Si $Y \subseteq X$, le sous-graphe de G engendré par Y est le graphe noté $G[Y]$ et défini par $G[Y] = (X, U \cap Y^2)$.

Un puits de G est un sommet de G sans sucesseur, c'est-à-dire un sommet de demi-degré extérieur (ou dde) nul.

On pose $k^+(G) = |\{h \in \mathbb{N}; \exists x \in X \ d^+(x) = h\} \cup \{0\}| - 1$
 et on appelle partition ordonnée de X associée au dde la
 partition $\mathcal{D}^+(G) = \{D_0^+, D_1^+, \dots, D_{k^+}^+\}$ définie par :

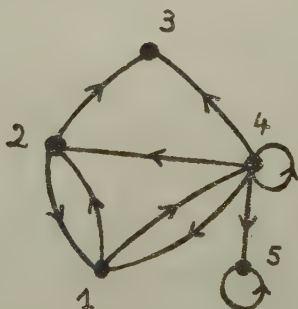
- chaque sommet x de G appartient à une classe unique D_i^+ et on note $\delta_i^+(x)$ cet indice i , $0 \leq i \leq k^+$
- si G n'a pas de puits, $D_0^+ = \emptyset$
- pour tout $x \in D_i^+$ et tout $y \in D_j^+$, on a $d^+(x) \leq d^+(y)$ ssi $i \leq j$.

Ainsi aucune classe D_i^+ n'est vide, sauf éventuellement D_0^+ , et tous les sommets d'une même classe D_i^+ ont le même dde noté $\underline{d}_i^+$. Alors la suite $0 = d_0^+ < d_1^+ < \dots < d_k^+$ est la suite des dde de G (à condition de supprimer d_0^+ si G n'a pas de puits).

En utilisant le demi-degré intérieur (ddi), on définit de façon analogue les sources de G , $k^-(G)$, $\mathcal{D}^-(G) = \{D_0^-, \dots, D_{k^-}^-\}$, δ_i^- et les $\underline{d}_i^-$.

On aura ainsi $\mathcal{D}^-(G) = \mathcal{D}^+(G^-)$, $k^-(G) = k^+(G^-)$ etc...

soit G le graphe ci-contre :



on a alors : $d^+(3) = 0$

$$d^+(5) = 1$$

$$d^+(1) = d^+(2) = 2$$

$$d^+(4) = 5$$

donc $k^+(G) = 3$ et $\mathcal{D}^+(G) = \{D_0^+, D_1^+, D_2^+, D_3^+\}$, avec

$D_0^+ = \{3\}$, $D_1^+ = \{5\}$, $D_2^+ = \{1, 2\}$ et $D_3^+ = \{4\}$; ainsi,

$$\delta^+(1) = 2, \delta^+(2) = 2, \delta^+(3) = 0, \delta^+(4) = 3 \text{ et } \delta^+(5) = 1.$$

de même on a : $d^-(1) = d^-(2) = d^-(3) = d^-(4) = d^-(5) = 2$;

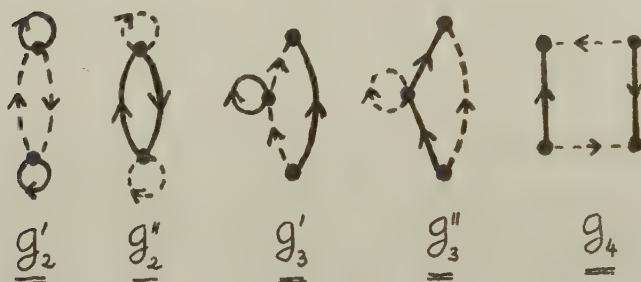
donc $k^-(G) = 1$ et $\mathcal{D}^-(G) = \{D_0^-, D_1^-\}$, avec $D_0^- = \emptyset$ et

$D_1^- = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; ainsi, $\delta^-(1) = \delta^-(2) = \delta^-(3) = \delta^-(4) = \delta^-(5) = 1$.

On dit qu'une suite (x, y, z, t) de sommets de G , non nécessairement tous distincts, est un 4-anti-circuit-alterné (4-a-c-a) de type i du graphe G lorsque $xy, zt \in U$, $xt, zy \notin U$ et $|\{x, y, z, t\}| = i$.

On constate que $2 \leq i \leq 4$ et on note $\mathcal{G}_i$ la classe des graphes ayant i sommets et admettant un 4-a-c-a de type i . Pour $i = 2, 3$, on note $\mathcal{G}_i'$ (resp. $\mathcal{G}_i''$) la classe des graphes G de $\mathcal{G}_i$ admettant un 4-a-c-a de type i (x, y, z, t) où xy ou zt est une boucle de G (resp. $\bar{G}$), auquel cas on dit que le 4-a-c-a est de type i' (resp. de type i'').

Avec la convention qu'on trace en traits pleins les arcs de G et en traits pointillés ceux de $\bar{G}$, et qu'on ne trace aucun arc lorsqu'il est indifférent qu'il appartienne à G ou à $\bar{G}$, les classes g_2', g_2'', g_3', g_3'' et g_4 sont représentées à un isomorphisme près, par la figure ci-dessous.



On pose $\underline{g} = g_2 \cup g_3 \cup g_4$.

Enfin, on note $\mathcal{F}$ la classe des graphes qu'on peut construire à partir du graphe vide $(\emptyset, \emptyset)$ en appliquant récursivement les règles suivantes :

(f_1) : si $G = (X, U) \in \mathcal{F}$,

- choisir $A', A'' \in \{\Gamma^+(x) ; x \in X\} \cup \{\emptyset, X\}$
avec $A' \subseteq A''$, de sorte qu'il n'existe aucun
sommet t de G tel que $A' \subset \Gamma^+(t) \subset A''$, et
choisir $A \subseteq X$ telque $A' \subseteq A \subseteq A''$

- ajouter à G un nouveau sommet z , et tous les arcs d'origine z et d'extrémité dans A

(f_2) : si $G = (X, U) \in \mathcal{F}$,

- choisir $A \subseteq X$ comme en (f_1) où Γ^+ serait remplacé par Γ^-
- ajouter à G un nouveau sommet bouclé z , tous les arcs d'origine z et d'extrémité dans X , et tous les arcs d'origine dans A et d'extrémité z

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant :

THEOREME 1

Pour un graphe $G = (X, U)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(F1) il existe deux applications $v^+, v^- : \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(a) \quad \forall x \in X \quad v^+(x), v^-(x) \leq t$$

(b) si $Y, Z \subseteq X$ et si $\sum_{x \in Y} v^+(x), \sum_{x \in Z} v^-(x) \leq t$, alors :

$$(Y \times Z) \cap U = \emptyset \iff \sum_{x \in Y} v^+(x) + \sum_{x \in Z} v^-(x) \leq t$$

(F2) il existe deux applications $v^+, v^- : \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff v^+(x) + v^-(y) > t$$

$$(F3) \quad (a) \quad k^+(G) = k^-(G)$$

$$(b) \quad \forall x, y \in X \quad xy \in U \iff \delta^+(x) + \delta^-(y) > k^+(G)$$

$$(F4) \quad (a) \quad k^+(G) = k^-(G)$$

$$(b) \quad \forall i \in [0, k^+(G)[\quad d_{i+1}^+ = d_i^+ + |D_{k^-(G)-i}^-|$$

$$(c) \quad \forall i \in [0, k^-(G)[\quad d_{i+1}^- = d_i^- + |D_{k^+(G)-i}^+|$$

(F5) il existe un ordre total $(E, \ll)$ et deux applications

$f_1, f_2 : \rightarrow E$ telles que :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff f_1(x) \ll f_2(y)$$

(F6) G est un graphe de la classe $\mathcal{F}$

(F7) G n'a aucun sous-graphe dans la classe $\mathcal{G}$

(F7bis) G n'admet aucun 4-a-c-a

(F8) $\gamma^+(G)$ est un préordre total

(F8bis) $\gamma^-(G)$ est un préordre total

démonstration :

le schéma que nous proposons ci-dessous n'est pas le plus court en nombre d'étapes, mais il cherche à utiliser au maximum les argumentations les plus simples;

(F7) $\iff$ (F7bis) : trivial

non (F8bis) $\Leftrightarrow$ non (F7bis) $\Leftrightarrow$ non (F8) : évident

(F3) $\Rightarrow$ (F4) : soit $i \in [0, k^+]$ et soient $x \in D_{i+1}^+$, i.e.

$\delta^+(x) = i+1$, et $y \in D_i^+$, i.e. $\delta^+(y) = i$; alors :

$$z \in \Gamma^+(x) - \Gamma^+(y) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^+(x) + \delta^-(z) > k^+ \\ \delta^+(y) + \delta^-(z) \leq k^+ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow k^+ - i - 1 < \delta^-(z) \leq k^+ - i \Leftrightarrow z \in D_{k^+ - i}^-;$$

ce qui prouve le (b) de (F4); on démontre de même le

(c) de (F4);

(F4) $\Rightarrow$ (F3) : posons $k = k^+ (=k^-)$; comme $d_0^+ = d_0^- = 0$, il est

clair, par induction sur i , que pour tout $i \in [1, k]$, on

$$a \quad d_i^+ = \sum_{j=k+1-i}^k |D_j^-| \quad \text{et} \quad d_i^- = \sum_{j=k+1-i}^k |D_j^+|;$$

d'autre part, on aura montré (F3) en montrant, par

induction sur h , la propriété $P(h)$ définie pour $1 \leq h \leq 2k$

par :

$$P(2i) : \forall x \in D_i^+ \quad \Gamma^+(x) = \bigcup_{j=k+1-i}^k D_j^-$$

$$P(2i-1) : \forall x \in D_{k+1-i}^- \quad \Gamma^-(x) = \bigcup_{j=i}^k D_j^+$$

• $P(1)$:

soit $x \in D_k^-$; comme D_0^+ est la classe des puits de G , on

a $\Gamma^-(x) \subseteq \bigcup_{j=1}^k D_j^+$; or, d'après la remarque préliminaire,

on a $d^-(x) = d_k^- = \sum_{j=1}^k |D_j^+|$; donc $\Gamma^-(x) = \bigcup_{j=1}^k D_j^+$;

- $P(2i)$ pour $2 \leq 2i \leq 2k$: soit $x \in D_i^+$;
alors, pour $1 \leq 2p-1 < 2i$, i.e. $1 \leq p < i$, $P(2p-1) \Rightarrow$
 $\forall y \in D_{k+1-p}^- \quad \Gamma^-(y) \supseteq D_i^+$; donc $\Gamma^+(x) \supseteq \bigcup_{j=k+1-i}^k D_j^-$;
or on a $d^+(x) = d_i^+ = \sum_{j=k+1-i}^k |D_j^-|$; donc on a $P(2i)$;
- $P(2i-1)$ pour $3 \leq 2i-1 \leq 2k$: soit $x \in D_{k+1-i}^-$;
alors, pour $2 \leq 2p < 2i-1$, i.e. $1 \leq p < i$, on a
 $P(2p) \Rightarrow \forall y \in D_p^+ \quad \Gamma^+(y) \cap D_{k+1-i}^- = \emptyset$; on a alors
 $\Gamma^-(x) \subseteq \bigcup_{j=i}^k D_j^+$; or $d^-(x) = d_{k+1-i}^- = \sum_{j=i}^k |D_j^+|$; on a
donc $P(2i-1)$;

(F5) $\Rightarrow$ (F6) : par induction sur $n(G) = n$;

(F6) est manifestement vérifiée pour $n=1$; supposons donc

$n \geq 2$ et soit $m = \min (f_1(X) \cup f_2(X))$;

- si $m \neq f_1(x)$ pour tout $x \in X$, soit $z \in X$ tel que $f_2(z) = m$;
posons $Z = X - \{z\}$ et soit $G' = G[Z]$ le sous-graphe de G
engendré par Z ; il est clair que G' satisfait encore
la condition (F5) ;
soit $X' = \{x \in Z ; f_1(z) \leq f_1(x)\}$; si $X' = \emptyset$ on pose
 $A' = \emptyset$, et si $X' \neq \emptyset$, en choisissant $x' \in X'$ tel que
 $f_1(x') = \min f_1(X')$, on pose $A' = \Gamma^+(x')$;
soit $X'' = \{x \in Z ; f_1(x) \leq f_1(z)\}$; si $X'' = \emptyset$ on pose
 $A'' = Z$, et si $X'' \neq \emptyset$, en choisissant $x'' \in X''$ tel que
 $f_1(x'') = \max f_1(X'')$, on pose $A'' = \Gamma^+(x'')$;

il est clair que $A', A'' \in \{\Gamma_G^+(x); x \in Z\} \cup \{\emptyset, Z\}$,

avec $A' \subseteq A''$, et qu'il n'existe aucun $t \in Z$ tel que

$f_1(x'') < f_1(t) < f_1(x')$, donc aucun $t \in Z$ tel que

$A' \subset \Gamma_G^+(t) \subset A''$; d'autre part, $\Gamma_G^-(z) = \emptyset$ et

$A' \subseteq \Gamma_G^+(z) \subseteq A''$; donc G est construit à partir de G'

par application de la règle (f_1) ; comme $G' \in \mathcal{F}$ par

hypothèse d'induction, on a bien $G \in \mathcal{F}$;

- si $m = f_1(z)$ pour $z \in X$, posons $Z = X - \{z\}$ et soit encore $G' = G[Z]$;

soit $X' = \{x \in Z; f_2(x) \leq f_2(z)\}$; si $X' = \emptyset$ on pose

$A' = \emptyset$, et si $X' \neq \emptyset$, en choisissant $x' \in X'$ tel que

$f_2(x') = \max f_2(X')$, on pose $A' = \Gamma_G^-(x')$;

soit $X'' = \{x \in Z; f_2(z) \leq f_2(x)\}$; si $X'' = \emptyset$ on pose

$A'' = Z$, et si $X'' \neq \emptyset$, en choisissant $x'' \in X''$ tel que

$f_2(x'') = \min f_2(X'')$, on pose $A'' = \Gamma_G^-(x'')$;

il est clair que $A', A'' \in \{\Gamma_G^+(x); x \in Z\} \cup \{\emptyset, Z\}$,

avec $A' \subseteq A''$, et qu'il n'existe aucun $t \in Z$ tel que

$A' \subset \Gamma_G^-(t) \subset A''$; d'autre part $\Gamma_G^+(z) = X = Z \cup \{z\}$

et $A' \subseteq \Gamma_G^-(z) \subseteq A''$; donc G est construit à partir de

G' par application de la règle (f_2) ; comme $G' \in \mathcal{F}$ par

hypothèse d'induction, on a bien $G \in \mathcal{F}$;

(F6) $\Rightarrow$ (F8) : évident par induction sur $n(G)$, car les règles

(f_1) et (f_2) conservent trivialement la condition (F8);

(F8) $\Rightarrow$ (F5) : soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de sorte que
 $i < j \Rightarrow \Gamma^+(x_i) \supseteq \Gamma^+(x_j)$; posons, pour tout i , $f_1(x_i) = i$
 et $f_2(x_i) = |\Gamma^-(x_i)|$; alors $x_i x_j \in U \Leftrightarrow x_p x_j \in U$ pour
 tout p tel que $1 \leq p \leq i \Leftrightarrow f_2(x_i) \geq i = f_1(x_i)$;

(F1) $\Rightarrow$ (F2) : trivial

(F2) $\Rightarrow$ (F5) : en augmentant éventuellement t d'une quantité
 suffisamment petite, on peut supposer que
 $\forall x, y \in X \quad xy \in U \Leftrightarrow v^+(x) + v^-(y) \geq t$; en posant $f_1 = t - v^+$
 $f_2 = v^-$, on constate que la condition (F5) est trivialement
 satisfaite ;

(F5) $\Rightarrow$ (F3) : soient $m, M \notin E$, $E' = E \cup \{m, M\}$, et soit $(E', \leq)$
 une extension de $(E, \leq)$ admettant respectivement m et M
 comme éléments minimum et maximum ;
 avec la convention que $\min(\phi) = M$ et $\max(\phi) = m$, posons
 pour tout $x \in X$:

$$h_1(x) = \min \{ f_2(y) ; f_1(x) \leq f_2(y) \}$$

$$h_2(x) = \max \{ h_1(y) ; h_1(y) \leq f_2(x) \}$$

on a alors, pour tous $x, y \in X$, $xy \in U \Leftrightarrow h_1(x) \leq f_2(y)$

$$\Leftrightarrow h_1(x) \leq h_2(y) ;$$

de plus, $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y) \Leftrightarrow h_1(x) = h_1(y)$ et de même

$$\Gamma^-(x) = \Gamma^-(y) \Leftrightarrow h_2(x) = h_2(y) ;$$

posons $h_1(X) \cap h_2(X) = E'' = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ de sorte que

$a_1 < a_2 < \dots < a_k$, et posons $a_0 = m$ et $a_{k+1} = M$;

alors $E'' \subseteq h_1(X) \subseteq E'' \cup \{a_{k+1}\}$ et $E'' \subseteq h_2(X) \subseteq \{a_0\} \cup E''$;
 il est clair que $D_i^+ = h_1^{-1}(a_{k+1-i})$ et $D_i^- = h_2^{-1}(a_i)$; la
 condition (F3) est donc satisfaite ;

(F3) $\Rightarrow$ (F1) : posons $k = k^+(G) (=k^-(G))$ et $n = n(G)$; le
 choix de t et des applications v^+ et v^- que nous allons
 faire n'est pas le plus économique possible, mais il nous
 évitera d'avoir à discuter suivant la parité de k ;
 supposons $k > 0$ (sinon la condition (F1) est évidemment
 satisfaite), et posons $p = \lfloor k/2 \rfloor$, $b = 2n+1$ (donc $b \geq 3$)
 et, pour tout $x \in X$, définissons $v^+(x)$ et $v^-(x)$ de sorte que :

$$\delta^+(x) \in [0, p] \Rightarrow v^+(x) = b \delta^+(x)$$

$$\delta^+(x) \in [p+1, k] \Rightarrow v^+(x) = b^{p+2} - b^{k+1} - \delta^+(x)$$

$$\delta^-(x) \in [0, p] \Rightarrow v^-(x) = b \delta^-(x)$$

$$\delta^-(x) \in [p+1, k] \Rightarrow v^-(x) = b^{p+2} - b^{k+1} - \delta^-(x)$$

posons alors $t = b^{p+2} - 1$;

tout d'abord, il est clair que le (a) de la condition (F1)
 est satisfait ;

d'autre part, en utilisant les symboles $\circ$ et $\bullet$ pour
 désigner l'un quelconque des signes $+$ et/ou $-$, et en posant

$A_i^\bullet = \bigcup_{j=0}^i D_j^\bullet$, on constate les deux faits suivants :

(α) : si $\delta^\circ(x) + \delta^\bullet(x') > k$, alors $v^\circ(x) + v^\bullet(x') > t$

en effet, soient $\delta^\circ(x) = i$, $\delta^\bullet(x') = i'$, et supposons

par exemple que $i > p+1$;

$$\bullet \text{ si } k+1-i \leq i' \leq p, \text{ alors } \delta^0(x) + \delta^{\bullet}(x') = \\ b^{p+2} - b^{k+1-i} + b^{i'} \geq b^{p+2} > t;$$

$$\bullet \text{ si } p+1 \leq i' \leq k, \text{ alors } \delta^0(x) + \delta^{\bullet}(x') = \\ 2b^{p+2} - b^{k+1-i} - b^{k+1-i'} \geq 2b^{p+2} - 2b^{k-p} \gg \\ 2b^{p+2} - 2b^{p+1} > t;$$

(β) : si $X' \subseteq X$ et si $\sum_{x \in X'} v^0(x) \leq t$, alors soit $X' \subseteq A_p^0$,

soit $X' = \{x\} \cup X''$ avec $\delta^0(x) = i > p$ et $X'' \subseteq A_{k-i}^0$;

en effet, ceci découle immédiatement du point (α);

montrons maintenant que le (b) de la condition (F1) est également satisfait;

soient $Y, Z \subseteq X$ tels que $\sum_{x \in Y} v^+(x) \leq t$ et $\sum_{x \in Z} v^-(x) \leq t$;

1^{er} cas : $Y \not\subseteq A_p^+$

alors, compte tenu du point (β), on a $Y = \{y\} \cup Y'$

avec $\delta^+(y) = i > p+1$ et $Y' \subseteq A_{k-i}^+$;

$\bullet$ si $Z \subseteq A_{k-i}^-$, alors $(Y \cap Z) \cap U = \emptyset$ d'après la condition

(F3), et $\sum_{x \in Y} v^+(x) + \sum_{x \in Z} v^-(x) \leq$

$$v^+(y) + \sum_{x \in A_{k-i}^+} v^+(x) + \sum_{x \in A_{k-i}^-} v^-(x) \leq$$

$$b^{p+2} - b^{k+1-i} + \sum_{j=0}^{k-i} 2nb^j \leq b^{p+2} - 1 = t;$$

$\bullet$ si $Z \not\subseteq A_{k-i}^-$, alors $(Y \cap Z) \cap U \neq \emptyset$ d'après la condition

(F3), et $\sum_{x \in Y} v^+(x) + \sum_{x \in Z} v^-(x) > t$ d'après le point

(α);

2^{ème} cas : $Z \not\subseteq A_p^-$

une démonstration analogue à celle du 1^{er} cas montre

$$\text{que } (X \setminus Y) \cap U = \emptyset \Leftrightarrow \sum_{x \in Y} v^+(x) + \sum_{x \in Z} v^-(x) \leq t ;$$

3^{ème} cas : $Y \subseteq A_p^+$, $Z \subseteq A_p^-$

alors $(Y \times Z) \cap U = \emptyset$ d'après la condition (F3), et

$$\sum_{x \in Y} v^+(x) + \sum_{x \in Z} v^-(x) \leq \sum_{x \in A_p^+} v^+(x) + \sum_{x \in A_p^-} v^-(x)$$

$$\leq \sum_{i=0}^p 2nb^i < b^{p+1} < t$$



REMARQUE 1

(a) : la condition (F1) peut paraître assez peu naturelle.

L'idée de départ était de chercher à séparer, au moyen de v^+ , v^- et t , les couples (Y, Z) , avec $Y, Z \subseteq X$, pour lesquels $(Y \times Z) \cap U = \emptyset$ de ceux pour lesquels $(Y \times Z) \cap U \neq \emptyset$.

Or ceci n'est pas toujours possible pour les graphes satisfaisant les conditions du théorème ci-dessus, comme le montre l'exemple de la figure ci-dessous :



G satisfait bien (F8) car

$$\Gamma^+(3) = \Gamma^+(2) \supset \Gamma^+(1)$$

or, comme $(\{1\} \times \{1, 2\}) \cap U = \emptyset$ et $(\{1, 2\} \times \{1\}) \cap U \neq \emptyset$

on voudrait avoir :

$$\begin{cases} v^+(1) + v^-(1) + v^-(2) \leq t \\ v^+(1) + v^+(2) + v^-(1) > t \end{cases}$$

et il faudrait donc $v^+(2) > v^-(2)$;

de même, comme $(\{2,3\} \times \{3\}) \cap U = \emptyset$ et $(\{3\} \times \{2,3\}) \cap U \neq \emptyset$

on voudrait avoir :
$$\begin{cases} v^+(2) + v^+(3) + v^-(3) \leq t \\ v^+(3) + v^-(2) + v^-(3) > t \end{cases}$$

et il faudrait donc $v^-(2) > v^+(2)$; d'où la contradiction.

Le (b) de la condition (F1) limite donc la "séparation"

parmi les couples (Y,Z) à ceux pour lesquels $\sum_{x \in Y} v^+(x) \leq t$

$\sum_{x \in Z} v^-(x) \leq t$.

Faute d'une condition supplémentaire sur v^+ , v^- et t ,

tout graphe satisfait le (b) de la condition (F1) : le (a)

impose que le (b) opère une "séparation" effective au

moins pour les couples (Y,Z) tels que $|Y| = |Z| = 1$, ce

qui rend la condition (F1) trivialement plus forte que

la condition (F2).

Il convient de noter que l'implication $(F2) \Rightarrow (F1)$

nécessite, elle, une démonstration, comme le montre le

graphe G de l'exemple ci-dessous :



avec $v^+(1) = 3$, $v^+(2) = 2$

$v^-(1) = 1$, $v^-(2) = 2$

et $t = 4$

on a bien $\forall x, y \in X \quad xy \in U \Leftrightarrow v^+(x) + v^-(y) > t$ et

$\forall x \in X \quad v^+(x), v^-(x) \leq t$, mais $v^+(2)$, $v^-(1) + v^-(2) \leq t$

tandis que $(\{2\} \times \{1,2\}) \cap U = \emptyset$ et $v^+(1) + v^-(1) + v^-(2) > t$.

(b) : en montrant que $(F3) \Rightarrow (F1)$, on a également prouvé qu'on pouvait exiger, dans la condition (F1), que :

- $v^+, v^- : \longrightarrow \mathbb{N}^+ \quad \text{et } t \in \mathbb{N}^+$
- $\forall x \in D_1^+ \quad \forall y \in D_1^- \quad v^+(x) = v^-(y)$

Nous posons alors comme définition :

DEFINITION : les graphes de Ferrers sont les graphes satisfaisant les conditions du théorème 1.

Nous rendrons compte du choix de cette terminologie après avoir énoncé d'autres caractérisations des graphes de Ferrers, pour lesquelles il nous faut d'abord donner de nouvelles définitions préliminaires.

On note respectivement $T_+(G)$ et $T_-(G)$, ou plus simplement T_+ et T_- , les préordres totaux associés à un graphe $G = (X, U)$ quelconque, et définis par :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in T_+ \iff d^+(x) \geq d^+(y)$$

$$\forall x, y \in X \quad xy \in T_- \iff d^-(x) \leq d^-(y)$$

Si $G = (X, U)$ et $H = (Y, V)$ sont deux graphes quelconques, on note $\underline{GH}$ le graphe $GH = (X \cup Y, W)$ appelé composé de G et H, et où $W = \{xz; x \in X, z \in Y, \exists y \in X \cap Y \quad xy \in U \text{ et } yz \in V\}$.

Si $G = (X, U)$ est un graphe quelconque, on appelle dual de G le graphe $G^d = (X, U^d)$ défini par $G^d = \overline{(G^-)} = (\bar{G})^-$.

Posons également $G_A = (X, U_A)$ où $U_A = \{xy \in U; yx \notin U\}$,
 $G_S = (X, U_S)$ où $U_S = \{xy \in U; yx \in U\}$ et $G_\Delta = (X, U_\Delta)$ où $U_\Delta = \{x \in U\}$.

On a donc $U_\Delta \subseteq U_S$ et ainsi, U^d se partitionne de la façon suivante : $U^d = U_A \cup (\bar{U})_\Delta \cup (\bar{U})_S$.

On dit que $G = (X, U)$ est une chaîne de pavés s'il existe deux suites $(Y_i)_{0 \leq i \leq k}$ et $(Z_i)_{0 \leq i \leq k}$ telles que :

- $\emptyset \subseteq Y_0 \subset Y_1 \dots \subset Y_k = X$
- $\emptyset \subseteq Z_k \subset Z_{k-1} \dots \subset Z_0 = X$
- $U = \bigcup_{0 \leq i \leq k} (Y_i \times Z_i)$

Enfin, dans un souci de complétude, rappelons très brièvement ce qu'on entend par treillis de Galois associé à un graphe $G = (X, U)$ quelconque, et qu'on notera $\text{Gal}(G)$ — pour les démonstrations omises et pour plus de détails, on peut consulter [BAR-MON, BOU, ORE].

Pour tout $A \subseteq X$, on pose :

$$f^+(A) = \{y \in X; \forall x \in A \quad xy \in U\}$$

$$f^-(A) = \{y \in X; \forall x \in A \quad yx \in U\}$$

(f^+ et f^- sont appelées les correspondances de Galois associées à G).

$$\text{On pose alors : } F^+ = \{f^+(A); A \in \mathcal{P}(X)\}$$

$$F^- = \{f^-(A); A \in \mathcal{P}(X)\}$$

et on constate que, pour tout $A \subseteq X$, on a :

$$f^+ (f^- (f^+ (A))) = f^+ (A)$$

$$f^- (f^+ (f^- (A))) = f^- (A)$$

En posant $h'(A) = f^- (f^+ (A))$ et $h''(A) = f^+ (f^- (A))$, on constate que h' et h'' sont des fermetures (i.e. par exemple pour h' : (1) $\forall A \subseteq X \quad A \subseteq h'(A)$, (2) $\forall A, B \subseteq X \quad A \subseteq B \Rightarrow h'(A) \subseteq h'(B)$, et (3) $\forall A \subseteq X \quad h'(h'(A)) = h'(A)$) et que les ensembles de fermés associés à h' et h'' (i.e. par exemple pour h' , l'ensemble des $A \subseteq X$ tels que $A = h'(A)$) sont respectivement F^- et F^+ .

Ainsi, pour tout $A \subseteq X$, on a : $f^+(A) = f^+(h'(A))$ et $f^-(A) = f^-(h''(A))$. De plus, f^+ et f^- restreintes respectivement à F^- et F^+ sont des isomorphismes réciproques pour les ensembles ordonnés $(F^-, \subseteq)$ et $(F^+, \supseteq)$ qui ont une structure de treillis complets.

Le treillis de Galois associé à G , noté $\text{Gal}(G)$, est l'ensemble des couples (A, B) tels que $A \in F^-$, $B \in F^+$ et $B = f^+(A)$, ou de façon équivalente $A = f^-(B)$, ordonnés par la relation $\prec$ définie par : si (A, B) et (A', B') sont des éléments de $\text{Gal}(G)$, alors $(A, B) \prec (A', B') \iff A \subseteq A' \iff B \supseteq B'$. Les opérations de borne inférieure et borne supérieure notées respectivement $\wedge$ et $\vee$, satisfont :

$$(A, B) \wedge (A', B') = (A \cap A', h''(B \cup B'))$$

$$(A, B) \vee (A', B') = (h'(A \cup A'), B \cap B')$$

On constate que les éléments de $\text{Gal}(G)$ sont les couples (A, B) tels que $A, B \subseteq X$ et $A \times B \subseteq U$, et maximum pour ces propriétés au sens de l'inclusion, c'est-à-dire que si $A \subseteq A' \subseteq X$, $B \subseteq B' \subseteq X$ et si $A' \times B' \subseteq U$, alors $A = A'$ et $B = B'$.

Nous pouvons maintenant caractériser les graphes de Ferrers de la façon suivantes :

THEOREME 2

Un graphe $G = (X, U)$ est un graphe de Ferrers ssi il vérifie l'une des conditions suivantes :

- (1) G est une chaîne de pavés
- (2) $\text{Gal}(G)$ est un ordre total
- (3) $GG^d \subseteq G$
- (4) $GG^d = (GG^d)_A$
- (4bis) $G^d G = (G^d G)_A$
- (5) $\forall x, y, z, t \in X \quad xy, zt \in U \Rightarrow \{xt, zy\} \cap U \neq \emptyset$
- (6) $\gamma^+ = T_+$
- (6bis) $\gamma^- = T_-$
- (7) il existe un ordre total τ sur X tel que $\tau G \subseteq G$
- (7bis) il existe un ordre total τ sur X tel que $G \tau \subseteq G$
- (8) pour tout ordre total τ sur X inclus dans T_+ , on a $\tau G \subseteq G$
- (8bis) pour tout ordre total τ sur X inclus dans T_- , on a $G \tau \subseteq G$

démonstration : les (Fi) utilisée ici renvoient aux conditions du théorème 1 page I - 5 ;

(1) $\Rightarrow$ (2) : soit donc $U = \bigcup_{0 \leq i \leq k} (Y_i \times Z_i)$ avec

$$\emptyset \subseteq Y_0 \subset Y_1 \dots \subset Y_k = X \quad \text{et} \quad \emptyset \subseteq Z_k \subset Z_{k-1} \dots \subset Z_0 = X ;$$

soit $A \subseteq X$ et soit a le plus petit indice i tel que $A \subseteq Y_i$;

il est alors clair que $Z_a \subseteq f^+(A)$; si $a=0$, on a $Z_a = X$ et

donc $Z_a = f^+(A)$; si $a \neq 0$, soit $z \in X - Z_a$ et soit b le plus

grand indice i tel que $z \in Z_i$; on a alors $b < a$ et donc

$$A - Y_b \neq \emptyset ;$$

soit alors $y \in A - Y_b$; pour $0 \leq i \leq b$, on a $y \notin Y_i$, et pour

$b < i \leq k$, on a $z \notin Z_i$; donc $yz \notin U$ et par conséquent $z \notin f^+(A)$;

on a donc $f^+(A) = Z_a$;

on démontrerait de même que $f^-(A) = Y_c$ où c est le plus grand

indice i tel que $A \subseteq Z_i$;

donc $F^- = \{Y_i ; 0 \leq i \leq k\}$ et $F^+ = \{Z_i ; 0 \leq i \leq k\}$, et on

en déduit aisément que les couples (Y_i, Z_i) , pour $0 \leq i \leq k$,

sont les éléments de $\text{Gal}(G)$ qui est bien un ordre total.

(2) $\Rightarrow$ (1) : puisque $\text{Gal}(G)$ est un ordre total, on peut l'écrire

$(Y_0, Z_0) \prec (Y_1, Z_1) \prec \dots \prec (Y_k, Z_k)$ et, compte tenu de sa définition,

on a $\emptyset \subseteq Y_0 \subset Y_1 \dots \subset Y_k = X$ et $\emptyset \subseteq Z_k \subset Z_{k-1} \subset \dots \subset Z_0 = X$;

de plus, $U = \bigcup_{0 \leq i \leq k} (Y_i \times Z_i)$ en raison de la propriété de

maximalité des pavés $Y_i \times Z_i$; G est donc bien une chaîne de

pavés ;

(F3) $\Rightarrow$ (1) : posons $k^+(G) = k$ et supposons $k \geq 1$ (si $k=0$, le résultat est trivial) ; posons, pour $1 \leq i \leq k$:

$$Y_i = \bigcup_{k+1-i \leq j \leq k} D_j^+ \quad \text{et} \quad Z_i = \bigcup_{i \leq j \leq k} D_j^- ;$$

compte tenu de (F3), on a bien $U = \bigcup_{1 \leq i \leq k} (Y_i, Z_i)$, et les

suites $(Y_i)_{1 \leq i \leq k}$ et $(Z_i)_{1 \leq i \leq k}$, en rajoutant $Y_0 = \emptyset$ et $Z_0 = X$ si $D_0^- \neq \emptyset$ et en rajoutant $Y_{k+1} = X$ et $Z_{k+1} = \emptyset$ si $D_0^+ \neq \emptyset$, montrent que G est une chaîne de pavés ;

(1) $\Rightarrow$ (F8) : évident

(F7bis) $\Leftrightarrow$ (3), (4), (4bis), (5) : l'existence d'un 4-a-c-a de G est trivialement équivalente à la négation de chacune des conditions (3), (4), (4bis), (5) ;

(F8) $\Leftrightarrow$ (6) et (F8bis) $\Leftrightarrow$ (6bis) : évident

(8) $\Rightarrow$ (7) : trivial

(7) $\Rightarrow$ (F8) : en effet, si $xy \in \mathcal{T}$, alors $yz \in U \Rightarrow xz \in U$, et donc $\Gamma_G^+(x) \supseteq \Gamma_G^+(y)$; or $\mathcal{T}$ est un ordre total ;

(F8) $\Rightarrow$ (8) : évident, en tenant compte du fait que (F8) $\Rightarrow$ (6)

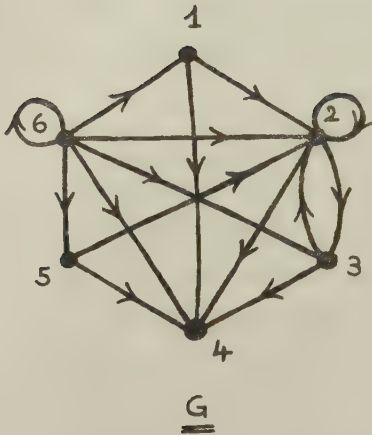
(8bis) $\Rightarrow$ (7bis) $\Rightarrow$ (F8bis) $\Rightarrow$ (8bis) : de façon analogue à la démonstration de (8) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (F8) $\Rightarrow$ (8) .

Ainsi lorsqu'un graphe $G = (X, U)$ est un graphe de Ferrers, on dira qu'un ordre total $\mathcal{C}$ sur X est compatible à gauche avec G (resp. à droite) lorsque $\mathcal{C}G \leq G$ (resp. $G\mathcal{C} \leq G$).

Les différentes caractérisations des graphes de Ferrers réunies dans le théorème 1 page I-5 et le théorème 2 page I-18, sont dues, dans leur ensemble, à différents auteurs. En particulier, seules sont originales les conditions (F1), (F2), (F3), (F4), (F6), (F7) et (F7bis) du théorème 1.

Plus précisément, L. Guttman [STO] et J. Riquet [RIG] ont indépendamment introduit la notion de graphe de Ferrers en établissant l'équivalence des conditions (F5), (F8) et (F8bis) pour le premier, et des conditions (1), (3), (F8) et (F8bis) pour le second, et en remarquant que si l'on représente un graphe de Ferrers $G = (X, U)$ par une matrice carrée $M = [M_{i,j}]$ à coefficients 0-1, dont les lignes et les colonnes sont indicées par X , et de telle sorte que $M_{x,y} = 1 \iff xy \in U$, on peut obtenir une matrice de forme particulière, dite "en escalier", en ordonnant les lignes (resp. les colonnes) de M suivant un ordre total compatible à gauche (resp. à droite) avec G (propriété que B. Monjardet appelle : "admettre un tableau en escalier" [MON]).

Par exemple, si G est le graphe donné par la figure suivante, on peut le représenter par une matrice en escalier en indiquant respectivement les lignes et les colonnes de M par les ordres totaux $\mathcal{C}_1 = 625314$ et $\mathcal{C}_2 = 651342$ qui sont compatibles avec G , respectivement à gauche et à droite.



	2	4	3	1	5	6
6	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0

M

Cette remarque a sans doute motivé l'utilisation du terme de "relation de Ferrers" utilisé par J. Riguët, terminologie que O. Ore, qui établit l'équivalence des conditions (F8), (5) et (3) [ORE], reprend à son compte en rappelant le rôle joué par les diagrammes de Ferrers dans l'étude des partitions de nombres entiers :

par exemple, on représente la partition $6+3+2+2+2$ de l'entier 15 au moyen du diagramme suivant :

1	1	1	1	1	1	= 6
1	1	1				= 3
1	1					= 2
1	1					= 2
1	1					= 2

en additionnant par colonnes les 1 de ce diagramme, on obtient $15 = 5+5+2+1+1+1$, qu'on appelle la partition conjuguée de la précédente. On remarquera que les 1 du diagramme de Ferrers dessinent la même "silhouette" que ceux de la matrice M ci-dessus.

Enfin, A. Bouchet [BOU] établit l'équivalence des conditions (1), (2) et (F5), tandis que B. Monjardet [MON] donne celle des conditions (F8), (F8bis), et de celles du théorème 2, à l'exception des conditions (1) et (2).

ⓑ - Propriétés élémentaires de la classe des graphes de Ferrers

On peut remarquer que la condition (F7) du théorème 1 (p. I - 5) est une caractérisation des graphes de Ferrers par sous-graphes exclus, et qu'on en déduit en particulier :

PROPRIETE 1

Tout sous-graphe d'un graphe de Ferrers est un graphe de Ferrers.

De plus, il est clair qu'en restreignant comme il convient les ordres totaux compatibles à gauche ou à droite avec un graphe de Ferrers G , on obtient encore des ordres totaux compatibles respectivement à gauche et à droite avec les sous-graphes de G .

En fait, la propriété ci-dessus est un cas particulier d'un résultat plus général :

PROPRIETE 2 [BOU]

Si $G = (X, U)$ est un graphe de Ferrers et si $Y, Z \subseteq X$, alors $H = (Y \cup Z, U \cap (Y \times Z))$ est un graphe de Ferrers.

démonstration : supposons que (x, y, z, t) soit un 4-a-c-a de H ,
 et posons $U \cap (Y \times Z) = V$;
 alors $xy, zt \in V$, et donc $x, z \in Y$ et $y, t \in Z$; ce qui permet de conclure
 de $xt, zy \notin V$ que $xt, zy \notin U$; (x, y, z, t) est donc également un 4-a-c-a
 de G , ce que contredit la condition (F7bis) du théorème 1 page I - 5 .

Une propriété immédiate, mais néanmoins fondamentale, de la
 classe des graphes de Ferrers, est qu'elle est globalement invariante
 pour les opérateurs $G \mapsto G^-$, $G \mapsto \bar{G}$, et $G \mapsto G^d$: il suffit de
 constater que (x, y, z, t) est un 4-a-c-a d'un graphe G ssi l'une des
 conditions suivantes est réalisée : (y, x, t, z) est un 4-a-c-a de G^- ,
 (z, y, x, t) est un 4-a-c-a de $\bar{G}$, (y, z, t, x) est un 4-a-c-a de G^d ; la
 condition (F7bis) du théorème 1 (p.I-5) permet alors de conclure :

PROPRIÉTÉ 3

Pour tout graphe G , les conditions suivantes
 sont équivalentes :

- (1) G est un graphe de Ferrers
- (2) G^- est un graphe de Ferrers
- (3) $\bar{G}$ est un graphe de Ferrers
- (4) G^d est un graphe de Ferrers

La propriété 3 ci-dessus est énoncée par B. Monjardet [MON] ,
 et, sauf la condition (4), par J. Riguet [RIG] . A. Bouchet [BOU]
 montre l'équivalence des conditions (1) et (3).

Enfin, la classe des graphes de Ferrers est absorbante pour la composition :

PROPRIETE 4

Si G est un graphe de Ferrers et si H est un graphe quelconque, GH et HG sont des graphes de Ferrers.

Plus précisément, si $G = (X, U)$ et si $H = (Y, V)$, tout ordre total τ sur $X \cup Y$ tel que $\tau[X]$ soit compatible à gauche (resp. à droite) avec G , et tel que si $x \in X$ et $y \in Y - X$, alors $xy \in \tau$ (resp. $yx \in \tau$) est compatible à gauche (resp. à droite) avec GH (resp. HG).

démonstration :

si G est un graphe de Ferrers, la condition (7) du théorème 2 (p. 118) nous assure de l'existence d'un ordre total τ sur $X \cup Y$ tel que $\tau[X]$ soit compatible à gauche avec G et tel que si $x \in X$ et $y \in Y - X$, alors $xy \in \tau$; posons $GH = (X \cup Y, W)$; soient $x, y, z \in X \cup Y$ tels que $xy \in \tau$ et $yz \in W$; alors $y \in X$ et il existe $t \in X \cap Y$ tel que $yt \in U$ et $tz \in V$; de plus, pour ne pas contredire $xy \in \tau$, on a $x \in X$; par conséquent $xy \in \tau[X]$ et $yt \in U$; donc $xt \in U$ et $xz \in W$; on en déduit que τ est compatible à gauche avec GH , qui est donc un graphe de Ferrers; un raisonnement similaire pour la composition HG achève la démonstration.

En rappelant que la fermeture transitive d'un graphe $G = (X, U)$ est le plus petit graphe transitif contenant G , que nous notons $G^t = (X, U^t)$, et en remarquant que $G^t = G (I \cup G \cup \dots \cup G^{n-1})$, où $I = (X, \{xx; x \in X\})$ et $n = n(G)$, on déduit trivialement de la propriété précédente :

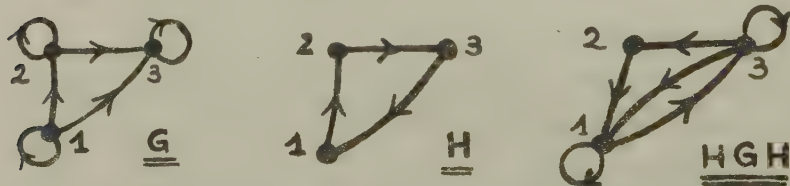
COROLLAIRE :

Si G est un graphe de Ferrers, G^t est également un graphe de Ferrers, et tout ordre total compatible à gauche (resp. à droite) avec G est compatible à gauche (resp. à droite) avec G^t .

REMARQUE 2 :

on déduit de la propriété 4 ci-dessus que si G est un graphe de Ferrers et si H' et H'' sont deux graphes quelconques, alors $H' G H''$ est encore un graphe de Ferrers ;

mais l'exemple suivant montre qu'il ne semble pas exister de relation simple, en général, entre les ordres totaux compatibles avec $H' G H''$ et ceux compatibles avec G :



$\tau = 123$ est le seul ordre total compatible à gauche avec G , tandis que $\tau' = 312$ est le seul ordre total compatible à gauche avec HGH .

2 - GRAPHE DE FERRERS PARTICULIERS

Ⓐ - Les S-graphes de Ferrers

Appelons S-graphe (nous empruntons cette terminologie à B. Monjardet [MON]) tout graphe G tel que $G^2 \cap (\bar{G})^2$ soit un graphe vide.

Des nombreuses caractérisations des S-graphes citées dans [MON], nous extrayons le résultat suivant, qui se démontre aisément :

PROPRIÉTÉ 1

Pour un graphe $G = (X, U)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est un S-graphe
- (2) pour tous $x, y \in X$, $\Gamma^+(x) \supseteq \Gamma^+(y)$ ou $\Gamma^-(x) \supseteq \Gamma^-(y)$
- (3) G^- est un S-graphe
- (4) $\bar{G}$ est un S-graphe
- (5) G^d est un S-graphe

Un S-graphe de Ferrers est alors un S-graphe qui est également un graphe de Ferrers.

Les S-graphes de Ferrers n'ont encore, semble-t-il, jamais été étudiés que dans les cas particuliers où ils sont réflexifs ou anti-réflexifs.

Nous allons en donner diverses caractérisations dans le cas général.

Notons tout d'abord que, de la propriété 1 ci-dessus et de la propriété 3 page I-24, on conclut immédiatement :

PROPRIÉTÉ 2

Pour tout graphe G, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est un S-graphe de Ferrers
- (2) G^- est un S-graphe de Ferrers
- (3) $\bar{G}$ est un S-graphe de Ferrers
- (4) G^d est un S-graphe de Ferrers

A tout graphe $G = (X, U)$, on associe le préordre T(G) défini par : $\forall x, y \in X \quad xy \in T(G) \iff \Gamma^+(x) \supseteq \Gamma^+(y) \text{ et } \Gamma^-(x) \subseteq \Gamma^-(y)$.

De même, on lui associe les préordres totaux suivants :

$T_s(G)$: $\forall x, y \in X \quad xy \in T_s(G) \iff d^+(x) - d^-(x) \geq d^+(y) - d^-(y)$

$$\underline{T_{+-}(G)} : \forall x, y \in X \quad xy \in T_{+-}(G) \iff d^+(x) > d^+(y) \text{ ou } (d^+(x) = d^+(y) \text{ et } d^-(x) \leq d^-(y))$$

$$\underline{T_{-+}(G)} : \forall x, y \in X \quad xy \in T_{-+}(G) \iff d^-(x) < d^-(y) \text{ ou } (d^-(x) = d^-(y) \text{ et } d^+(x) \geq d^+(y))$$

On caractérise alors les S-graphes de Ferrers de la façon suivante :

THEOREME

Pour tout graphe $G = (X, U)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est un S-graphe de Ferrers
- (2) $T = T_{+-}$
- (2bis) $T = T_{-+}$
- (3) T est un préordre total
- (4) $T = T_S$
- (5) tout ordre total $\mathcal{T}$ sur X , inclus dans T_S est compatible à gauche et à droite avec G
- (6) il existe un ordre total sur X compatible à gauche et à droite avec G
- (7) G est un graphe de Ferrers et $T_{+-} = T_{-+}$
- (8) il existe deux applications $f_1, f_2 : \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$(i) \quad \forall x, y \in X \quad xy \in U \iff f_1(x) > f_2(y)$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in X \quad f_1(x) \leq f_1(y) \iff f_2(x) \leq f_2(y)$$

démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : pour tout graphe, on a $T \subseteq T_{+-}$; supposons $x, y \in X$ tels que $xy \in T_{+-}$;

- si $d^+(x) > d^+(y)$, alors $\Gamma^+(y) \not\subseteq \Gamma^+(x)$; comme G est un graphe de Ferrers, on a $\Gamma^+(x) \supseteq \Gamma^+(y)$ (cf. cond. (F8) thm 1, p. I-5) ; comme G est un S-graphe, on a $\Gamma^-(y) \supseteq \Gamma^-(x)$ (cf. cond. (2), pté 1, p. I-27) ; donc $xy \in T$;

- si $d^+(x) = d^+(y)$ et $d^-(x) \leq d^-(y)$, alors $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y)$ et $\Gamma^-(x) \subseteq \Gamma^-(y)$, puisque G est un graphe de Ferrers (cf. cond. (F8) et (F8bis), thm 1, p. I-5) ; on a encore $xy \in T$;

(1) $\Rightarrow$ (2bis) : démonstration similaire à celle ci-dessus

(2) et/ou (2bis) $\Rightarrow$ (3) : trivial

(3) $\Rightarrow$ (4) : pour tout graphe, on a $T \subseteq T_s$; supposons que $x, y \in X$ avec $xy \notin T$;

comme T est total, on a $yx \in T$, et en particulier,

$d^+(y) \geq d^+(x)$ et $d^-(y) \leq d^-(x)$, l'une au moins de ces deux inégalités étant stricte, puisque $xy \notin T$;

on en déduit que $d^+(y) - d^-(y) > d^+(x) - d^-(x)$, et donc que $xy \notin T_s$;

donc $T_s \subseteq T$;

(4) $\Rightarrow$ (5) : trivial

(5) $\Rightarrow$ (6) : trivial

(6) $\Rightarrow$ (7) : compte tenu de la condition (7) du théorème 2

page I-18, il suffit de montrer que $T_{+-} = T_{-+}$;

soient $x, y \in X$ avec $xy \in T_{+-}$, et soit $\mathcal{C}$ l'ordre total compatible à gauche et à droite avec G ;

• si $d^+(x) > d^+(y)$, alors $xy \in \mathcal{C}$ et, comme $G\mathcal{C} \subseteq G$, on a $d^-(x) \leq d^-(y)$; on a donc également $xy \in T_{-+}$;

• si $d^+(x) = d^+(y)$ avec $d^-(x) \leq d^-(y)$, on a évidemment $xy \in T_{-+}$;

- donc $T_{+-} \subseteq T_{-+}$, et on montrerait de même l'inclusion réciproque;

(7) $\Rightarrow$ (8) : la condition (F5) du théorème 1 page I-5 montre

qu'il existe deux applications $g_1, g_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$

telles que : $\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff g_1(x) > g_2(y)$;

on peut de plus supposer sans perte de généralité que

$\forall x, y \in X \quad g_1(x) \neq g_2(y)$;

soit $E \subseteq X$ une classe d'équivalence pour la relation

$x \sim y$ ssi $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y)$; il existe un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$

tel que $I \cap g_2(X) = \emptyset$, et $g_1(E) \subseteq I$ et on peut partitionner E en p classes

$E_1, E_2, \dots, E_p$ telles que :

$\forall x \in E_i \quad \forall y \in E_j \quad xy \in T_{+-} \iff i > j$

soient p valeurs distinctes $r_1 < r_2 < \dots < r_p$ appartenant à

l'intervalle I , et, pour tout $x \in E$, posons $f_1(x) = r_i$ ssi

$x \in E_i$;

de même, si $E \subseteq X$ est une classe d'équivalence pour la relation $x \sim y$ ssi $\Gamma^-(x) = \Gamma^-(y)$, il existe un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ tel que $I \cap g_1(X) = \emptyset$ et $g_2(E) \subseteq I$; on peut partitionner E en q classes $E_1, E_2, \dots, E_q$ telles que $\forall x \in E_i \quad \forall y \in E_j \quad xy \in T_{-+} \iff i \succ j$; soient q valeurs distinctes $r_1 < r_2 < \dots < r_q$ de l'intervalle I , et posons, pour tout $x \in E$, $f_2(x) = r_i$ ssi $x \in E_i$;

en pratiquant comme indiqué ci-dessus pour chaque classe d'équivalence de chacune des deux relations, il est clair qu'on construit deux applications $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant simultanément, pour tous $x, y \in X$, les conditions suivantes :

- $f_1(x) > f_2(y) \iff g_1(x) > g_2(y)$
- $f_1(x) \leq f_1(y) \iff yx \in T_{+-}$
- $f_2(x) \leq f_2(y) \iff yx \in T_{-+}$

comme $T_{+-} = T_{-+}$, ces deux applications f_1 et f_2 montrent que la condition (8) est satisfaite;

(8) $\Rightarrow$ (1) : la condition (F5) du théorème 1 page I - 5 montre que G est un graphe de Ferrers;

soient $x, y \in X$ tels que $\Gamma^+(x) \not\subseteq \Gamma^+(y)$; alors il existe $z \in \Gamma^+(y) - \Gamma^+(x)$, et on a $f_1(x) \leq f_2(z) < f_1(y)$; on en déduit que $f_2(x) < f_2(y)$ et que, par conséquent, $\Gamma^-(x) \supseteq \Gamma^-(y)$;

la condition (2) de la propriété 1 page I - 27 montre que G est S-graphe.

La condition (6) du théorème ci-dessus montre en particulier que les S-graphes de Ferrers sont les graphes de Ferrers qui peuvent être représentés par une matrice en escalier (cf. p. I - 21) dont les lignes et les colonnes peuvent être indicées au moyen d'un même ordre total.

(B) - Ordres d'intervalles, ordres quasi-forts et quasi-ordres

Etant donné que les graphes de Ferrers n'admettent aucun sous-graphe appartenant aux classes $\mathcal{G}_2$ et $\mathcal{G}_3$ (cf. cond.(F7), thm 1, p. I - 5), il apparaît clairement que la réflexivité et l'anti-réflexivité sont des propriétés fortes pour les graphes de Ferrers :

- les graphes de Ferrers réflexifs sont totaux (i.e. si $G = (X, U)$, G satisfait : $\forall x, y \in X \quad xy \notin U \Rightarrow yx \in U$)
- les graphes de Ferrers anti-réflexifs sont anti-symétriques et transitifs

En particulier, les graphes de Ferrers anti-réflexifs sont des ordres stricts, et, compte tenu de la propriété 3 page I - 24, leur classe est la duale de celle des graphes de Ferrers réflexifs.

En fait, ce type particulier d'ordres stricts a été étudié par différents auteurs — notamment par N. Wiener [WIE], P.C. Fishburn [FIS], B.G. Mirkin [MIR] — et nous allons montrer, à titre d'illustration, comment l'une de leurs caractérisations les plus intéressantes s'obtient en interprétant une propriété caractéristique des graphes de Ferrers écrite dans le cas d'un graphe anti-réfléxif.

Notons $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ et, si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$, on note $I_1 < I_2$ lorsque, pour tout $x \in I_1$ et tout $y \in I_2$, on a $x < y$.

On appelle alors, de façon classique, ordre d'intervalle, tout graphe $G = (X, U)$ tel qu'il existe une application $\lambda: X \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ satisfaisant :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff \lambda(x) < \lambda(y)$$

Le résultat suivant est dû à P.C. Fishburn ainsi qu'à B.G. Mirkin :

PROPRIÉTÉ ([FIS], [MIR])

Les graphes de Ferrers anti-réfléxifs sont les ordres d'intervalles.

démonstration :

- il est clair (par exemple par passage au complémentaire et en utilisant la propriété 3 page I - 24) que, pour un graphe $G = (X, U)$ anti-réfléxif, la condition (F5) du théorème 1 page I - 5 peut s'écrire :

il existe deux applications $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$a) \quad \forall x, y \in X \quad xy \in U \iff f_1(x) > f_2(y)$$

$$b) \quad \forall x \in X \quad f_1(x) \leq f_2(x)$$

- l'identification $\lambda(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ met clairement en évidence l'équivalence annoncée.



Ainsi, la propriété ci-dessus permet d'associer à chaque caractérisation des graphes de Ferrers une caractérisation des ordres d'intervalle.

En empruntant encore notre terminologie à B. Monjardet [MON], appelons ordres quasi-forts les ordres d'intervalles particuliers que sont les S-graphes de Ferrers anti-réfléxifs, et quasi-ordres leurs duaux que sont, compte tenu de la propriété 2 page I - 28 , les S-graphes de Ferrers réflexifs.

On peut alors utiliser à leur tour les différentes caractérisations des S-graphes de Ferrers (cf. thm p. I - 29) pour caractériser les ordres quasi-forts ou les quasi-ordres, et retrouver ainsi une partie des nombreuses axiomatiques sous lesquelles sont apparus ces graphes (introduits en particulier par E. Halphen [HAL] et R.D. Luce [LUC]), en analyse des préférences.

Par exemple, la condition (8) du théorème page I - 29 montre immédiatement que les ordres quasi-forts sont les ordres d'intervalles pour lesquels on peut de plus exiger que l'application $\lambda: X \rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{R})$ (cf. p. I - 34) soit telle que $\lambda(x) \subseteq \lambda(y) \Rightarrow \lambda(x) = \lambda(y)$ pour tous $x, y \in X$.

Cependant, il serait hors de proportion d'indiquer ici le détail des différentes caractérisations connues des quasi-ordres ou des ordres quasi-forts, et nous renvoyons à [MON] pour une synthèse de ces résultats. On trouvera explicitement dans [COG, c] ceux d'entre eux qu'on obtient comme corollaires immédiats du théorème page I - 29 .

©- Quelques caractérisations supplémentaires des graphes de Ferrers

Appelons ordres forts les duaux des préordres totaux (cf. [MON]).

On constate aisément que les ordres forts sont des ordres quasi-forts particuliers (cf. par ex. cond. (3), thm p. I - 29).

Les caractérisations suivantes des graphes de Ferrers sont dues, sauf la condition (4), à J. Riguet [RIG], la condition (5) se trouvant également dans [MON].

PROPRIETE

Pour tout graphe G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) G est un graphe de Ferrers
- (2) GG^d et/ou G^dG sont des ordres stricts
- (3) GG^d et/ou G^dG sont des ordres d'intervalles
- (3bis) GG^d et/ou G^dG sont des graphes de Ferrers
- (4) GG^d et/ou G^dG sont des ordres quasi-forts
- (5) GG^d et/ou G^dG sont des ordres forts

démonstration : raisonnons par exemple sur GG^d ;

- comme GG^d est anti-réfléxif pour tout graphe G , les conditions (3) et (3bis) sont trivialement équivalentes ;

- pour tout graphe $G = (X, U)$, on a, en posant $GG^d = (X, V)$:

$$\forall x, y \in X \quad xy \in V \iff \Gamma_G^+(x) - \Gamma_G^+(y) \neq \emptyset$$

et donc :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in V^d \iff \Gamma_G^+(y) \subseteq \Gamma_G^+(x)$$

- si G est un graphe de Ferrers, l'ensemble $\{\Gamma_G^+(x) ; x \in X\}$ est totalement ordonné par inclusion (cf. cond. (F8), thm 1, p. I - 5), et GG^d est bien le dual d'un préordre total; donc (1) $\implies$ (5);
- on a trivialement (5) $\implies$ (4) $\implies$ (3) $\implies$ (2);
- la condition (4) du théorème 2 page I - 18 permet de conclure immédiatement que (2) $\implies$ (1).

3 - GRAPHS DE FERRERS MINIMAUX CONTENANT UN GRAPHE DONNE

Si $G = (X, U)$ est un graphe de Ferrers, on a $GG^dG \subseteq G$ (cf. cond. (3), thm 2, p. I-18). Appelons alors intérieur de G le graphe GG^dG que nous noterons $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$ et appelons frontière de G le graphe $G - \tilde{G}$ que nous noterons $\bar{G} = (X, \bar{U})$. — on peut remarquer que, compte tenu de la propriété 4 page I-25, l'intérieur d'un graphe de Ferrers est encore un graphe de Ferrers.

Etablissons tout d'abord, sous forme d'un lemme, une caractérisation de l'intérieur et de la frontière d'un graphe de Ferrers (où $k(G) = k^+(G) = k^-(G)$, cf. cond. (F3), thm 1 p. I-5).

LEMME 1

Si $G = (X, U)$ est un graphe de Ferrers, alors

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \{xy; \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k(G) + 2\} \\ \bar{U} &= \{xy; \delta^+(x) + \delta^-(y) = k(G) + 1\}\end{aligned}$$

démonstration : la condition (F3) du théorème 1 page I-5 indique que : $\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+1$; soient $x, y \in X$ tels que $xy \in \tilde{U}$; alors il existe $z, t \in X$ tels que $xz \in U$, $zt \in U^d$ et $ty \in U$; on en conclut donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(x) + \delta^-(z) \geq k+1 \\ \delta^+(t) + \delta^-(z) \leq k \\ \delta^+(t) + \delta^-(y) \geq k+1 \end{array} \right.$$

on en déduit que $\delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+2$;

réciroquement, soient $x, y \in X$ tels que $\delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+2$;

on a donc $k \geq 2$ et $2 \leq \delta^+(x), \delta^-(y) \leq k$; par conséquent, on a

$1 \leq k+1 - \delta^+(x), k+1 - \delta^-(y) \leq k-1$, et il existe donc

$z \in D_{k+1-\delta^+(x)}^-$ et $t \in D_{k+1-\delta^-(y)}^+$; on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(x) + \delta^-(z) = k+1 \\ \delta^+(t) + \delta^-(y) = k+1 \end{array} \right.$$

dont on déduit que $\delta^+(t) + \delta^-(z) \leq k$; donc $xz \in U$, $tz \notin U$ et $ty \in U$;

par conséquent $xy \in \tilde{U}$;

on achève sans difficulté la démonstration.

Les graphes vides sont des graphes de Ferrers, et ce sont les graphes de Ferrers G pour lesquels $k(G) = 0$ — leur intérieur et leurs frontières sont évidemment des graphes vides aussi.

On déduit alors du lemme 1 ci-dessus que tous les graphes de Ferrers non vides ont une frontière non vide. Ceci montre en particulier que la condition (3) du théorème 2 page I-18 caractérisant les graphes de Ferrers, à savoir $CG^d G \subseteq G$, se ramène à une égalité pour les graphes vides, et à une inclusion stricte pour tous les autres graphes de Ferrers.

Enfin, le lemme 1 montre également que les graphes de Ferrers non vides dont l'intérieur est vide sont les graphes de Ferrers G pour les quels $k(G) = 1$. On les appelle graphes de Ferrers élémentaires.

La figure ci-dessous illustre les définitions d'intérieur et de frontière d'un graphe de Ferrers. On y a représenté la matrice associée au graphe de Ferrers G de l'exemple donné page I - 22, en marquant d'un 1 les arcs de $\tilde{G}$, d'une croix ceux de $\bar{G}$, et en laissant en blanc ceux de $\overline{\bar{G}}$.

	2	4	3	1	5	6
6	1	1	1	X	X	X
2	1	1	X			
5	X	X				
3	X	X				
1	X	X				
4						

M

Nous allons maintenant nous intéresser aux graphes de Ferrers minimaux contenant un graphe G donné.

PROPRIÉTÉ 1

Si H est un graphe de Ferrers contenant G , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) H est minimal pour ces propriétés
- (2) pour tout ordre total τ compatible à gauche (resp. à droite) avec H on a $\tau G = H$ (resp. $G\tau = H$)
- (3) $\overline{H} \subseteq G$

démonstration : posons $G = (X, U)$, $H = (X, V)$ et $k(H) = k$;

(1) $\Rightarrow$ (2) : soit τ un ordre total sur X compatible à gauche avec H ; alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet G \subseteq \tau G \\ \bullet \tau(\tau G) = \tau^2 G \subseteq \tau G \end{array} \right.$$

donc τG est un graphe de Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. 1-18) contenant G ;

d'autre part, $G \subseteq H \Rightarrow \tau G \subseteq \tau H$, et $\tau H \subseteq H$ par définition de τ ;
comme H est minimal, on a bien $\tau G = H$;

on complèterait de façon analogue la démonstration ;

(2) $\Rightarrow$ (3) : si $\overline{H} \not\subseteq G$, soit $xy \in \overline{V} - U$ et soit τ un ordre total sur X compatible à gauche avec H ;

soit τ' l'ordre total sur X tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \tau' [X - \{x\}] = \tau [X - \{x\}] \\ \bullet \forall x' \in D_{\tau'}^+(x) \quad x'x \in \tau' \end{array} \right.$$

il est clair que $\mathcal{C}' \subseteq T_+(H)$, et donc $\mathcal{C}'$ est encore compatible à gauche avec H (cf. cond. (8), thm 2, p. I - 18);

donc $\mathcal{C}'G = H$ et par conséquent, puisque $xy \in V$, il existe $z \in X$ tel que $xz \in \mathcal{C}'$ et $zy \in U$; on a donc :

$$\begin{cases} \bullet \delta^+(z) + \delta^-(y) \geq k+1 & \text{car } U \subseteq V \\ \bullet \delta^+(x) + \delta^-(y) = k+1 & \text{car } xy \in \bar{V} \end{cases}$$

on en déduit $\delta^+(z) \geq \delta^+(x)$, soit $zx \in \mathcal{C}'$; donc $x = z$, ce qui contredit $xy \notin U$ et $zy \in U$;

(3) $\Rightarrow$ (1) : soient $x, y \in X$ avec $xy \in \tilde{V}$; on a alors $k \geq 2$ et $1 \leq \delta^+(x), \delta^-(y) \leq k$; donc il existe $x' \in D_{k+1}^+ - \delta^-(y)$ et il existe $y' \in D_{k+1}^- - \delta^+(x)$; on a alors :

$$\begin{cases} \bullet \delta^+(x') + \delta^-(y) = k+1 \\ \bullet \delta^+(x) + \delta^-(y') = k+1 \\ \bullet \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+2 & \text{car } xy \in \tilde{V} \text{ (cf. lemme 1 ci-dessus)} \end{cases}$$

on en déduit que $\delta^+(x') + \delta^-(y') \leq k$, soit $x'y' \notin V$;

ainsi, si $G \supseteq \bar{H}$, supposons qu'il existe un graphe de Ferrers H' tel que $G \subseteq H' \subseteq H$, avec $H' = (X, V')$:

d'une part, on a $\bar{H} \subseteq G \subseteq H'$;

d'autre part, si $xy \in \tilde{V}$, alors il existe $x'y, xy' \in \bar{V} \subseteq U \subseteq V'$ et tels que $x'y' \notin V$, et donc $x'y' \notin V'$; comme H' est un graphe de Ferrers, le quadruplet (x', y, x, y') n'est pas un 4-a-c-a de H' , et donc $xy \in V'$;

par conséquent $\tilde{H} \subseteq H'$, et en définitive $H = H'$, ce qui prouve que H est minimal.

De la propriété 1, nous allons déduire deux résultats fondamentaux.

THEOREME 1

Tout graphe de Ferrers minimal contenant un graphe donné transitif est lui-même transitif.

Nous allons tout d'abord établir un lemme.

LEMME 2

Un graphe de Ferrers $G = (X, U)$ est transitif ssi il satisfait la condition :

$$\forall x \in X \quad \delta^+(x) + \delta^-(x) \leq k(G) + 1$$

démonstration : posons $k(G) = k$;

- supposons qu'il existe $y \in X$ tel que $\delta^+(y) + \delta^-(y) > k+1$;
alors $k \geq 2$ et il existe $x \in D_{k+1}^+ - \delta^-(y)$ et $z \in D_{k+1}^- - \delta^+(y)$;

on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(x) + \delta^-(y) = k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(z) = k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(y) \geq k+2 \end{array} \right.$$

on en déduit que $\delta^+(x) + \delta^-(z) \leq k$, soit $xz \notin U$;

G n'est donc pas transitif ;

- supposons que $\forall x \in X \quad \delta^+(x) + \delta^-(x) \leq k+1$ et soient $x, y, z \in X$ tels que $xy, yz \in U$; on a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(z) \geq k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(y) \leq k+1 \end{array} \right.$$

on en déduit que $\delta^+(x) + \delta^-(z) \geq k+1$, soit $xz \in U$;

G est donc bien transitif.

démonstration du théorème 1 :

soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et $H = (Y, V)$ un graphe de Ferrers contenant G et minimal pour ces propriétés; posons $k = k(H)$ et supposons $k \geq 1$ (si $k = 0$, le théorème est démontré);

- si $\delta^+(x) = 0$ ou $\delta^-(x) = 0$, on a $\delta^+(x) + \delta^-(x) \leq k+1$;
- si $\delta^+(x) \geq 1$ et $\delta^-(x) \geq 1$, alors il existe $y \in D_{k+1}^+ - \delta^-(x)$ et $z \in D_{k+1}^- - \delta^+(x)$; on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^+(y) + \delta^-(x) = k+1 \\ \delta^+(x) + \delta^-(z) = k+1 \end{array} \right.$$

en particulier $yx, xz \in \bar{V}$, et, compte tenu de la propriété 1 page I - 42, on a $yx, xz \in U$;

comme G est transitif, on a $yz \in U \in V$, soit $\delta^+(y) + \delta^-(z) \geq k+1$;
on en déduit alors que $\delta^+(x) + \delta^-(x) \leq k+1$;

- le lemme 2 ci-dessus permet de conclure que H est transitif.

PROPRIETE 2

Pour tout graphe de Ferrers minimal H contenant un graphe transitif G donné, on a : $H_S = G_S$.

démonstration :

soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soit $H = (Y, V)$ un graphe de Ferrers contenant G et minimal pour ces propriétés ; posons $k = k(H)$;

soient $x, y \in X$ tels que $xy, yx \in V$; on a alors :

$$\begin{cases} \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(x) \geq k+1 \end{cases}$$

d'autre part, en vertu du théorème 1 ci-dessus, H est transitif et, d'après le lemme 2 page I - 44, on a :

$$\begin{cases} \delta^+(x) + \delta^-(x) \leq k+1 \\ \delta^+(y) + \delta^-(y) \leq k+1 \end{cases}$$

on en déduit :

$$2(k+1) \leq \delta^+(x) + \delta^-(x) + \delta^+(y) + \delta^-(y) \leq 2(k+1)$$

par conséquent, $\delta^+(x) + \delta^-(y) = \delta^+(y) + \delta^-(x) = k+1$;

d'après le lemme 1 page I - 39, on a $xy, yx \in \overline{V}$, et la propriété 1 page I - 42 permet de conclure que $xy, yx \in U$;

on a donc bien $H_S = G_S$.

On déduit alors immédiatement du théorème 1 page I - 44
et de la propriété 2 ci-dessus :

THEOREME 2

Tout graphe de Ferrers minimal contenant un graphe transitif et antisymétrique donné est également transitif et antisymétrique ; de plus, l'ensemble de ses sommets bouclés est exactement celui du graphe donné.

REMARQUE : la transitivité est bien une condition indispensable dans l'énoncé du théorème 2 ci-dessus ; par exemple, le graphe G de la figure ci-dessous est tel qu'aucun graphe de Ferrers le contenant n'est antisymétrique.



G

$$X = \{1, 2, 3\}$$

$$U = \{12, 23, 31\}$$

en effet, supposons que $H = (X, V)$ soit un graphe de Ferrers antisymétrique contenant G ; alors $12, 23 \in V$ tandis que $13 \notin V$; comme le quadruplet $(1, 2, 2, 3)$ ne peut être un 4-a-c-a de H, on a nécessairement $22 \in V$; comme $31 \in V$, en considérant le quadruplet $(3, 1, 2, 2)$, on s'aperçoit que H ne peut être à la fois antisymétrique et graphe de Ferrers.

CHAPITRE II

DIMENSION FERRERS DES GRAPHS

1 - DEFINITION DE LA DIMENSION FERRERS D'UN GRAPHE

Soit $(G_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de graphes, avec $G_i = (X_i, U_i)$ pour tout i .

Le produit strict de la famille, noté $\prod_{1 \leq i \leq k} G_i$, est le graphe $G = (X, U)$ défini par :

- $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$
- $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k), y = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in X$
 $xy \in U \iff \forall i \in [1, k] \quad x_i y_i \in U_i$

Soient $G = (X, U)$ et $H = (Y, V)$ deux graphes quelconques et soit $\varphi : X \rightarrow Y$ une application.

On dit que φ est un plongement de G dans H, ou que G est l'image réciproque de H par φ , ce qu'on note $G = \varphi^{-1}(H)$, lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in U \iff \varphi(x) \varphi(y) \in V$$

Il n'est pas demandé à un plongement φ d'être injectif. En particulier, si $\varphi(x) = \varphi(y)$, il est clair que $\Gamma_G^+(x) = \Gamma_G^+(y)$ et que $\Gamma_G^-(x) = \Gamma_G^-(y)$. On dit alors que x et y sont des sommets jumeaux de G , et on peut considérer un plongement non injectif comme opérant une contraction de certains sommets jumeaux.

En constatant que (x,y,z,t) est un 4-a-c-a de G ssi $(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z), \varphi(t))$ est un 4-a-c-a de H , il apparait clairement qu'une telle contraction transporte la de structure de graphe de Ferrers :

PROPRIETE 1

Soit $\varphi : X \rightarrow Y$ un plongement de $G = (X,U)$ dans $H = (Y,V)$. Alors, G est un graphe de Ferrers ssi $H[\varphi(X)]$ est un graphe de Ferrers.

La définition de la dimension Ferrers s'appuie sur le résultat suivant:

THEOREME [BOU]

Pour un graphe G , les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ tels

$$\text{que } G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$$

(ibis) il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ tels

$$\text{que } G^- = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$$

(2) il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ tels

$$\text{que } \tilde{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$$

(2bis) il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ tels

$$\text{que } G^d = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$$

(3) il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ tels

$$\text{qu'il existe un plongement de } G \text{ dans } \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$$

démonstration :

(1) $\Leftrightarrow$ (1bis) et (2) $\Leftrightarrow$ (2bis) : évident puisque G est un graphe de Ferrers ssi G^- est un graphe de Ferrers (cf. pté 3, p. I-24);

(1) $\Leftrightarrow$ (2) : découle immédiatement des remarques suivantes:

- un graphe est un graphe de Ferrers ssi son complémentaire l'est aussi (cf. pté 3, p. I-24)
- l'ajout ou la suppression de sommets isolés conserve la propriété d'être un graphe de Ferrers (cf. cond. (F6) ou (F8), thm 1, p. I-5)
- tout sous-graphe d'un graphe de Ferrers est un graphe de Ferrers (cf. pté 1, p. I-23)

(1) $\Rightarrow$ (3) : l'application $\varphi: X \rightarrow \bigcap_{1 \leq i \leq k} X_i$ telle que

$\varphi(x) = (x_1, \dots, x_k) = (x, \dots, x)$ est manifestement un plongement de G dans $\bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$ lorsque $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$, avec $G = (X, U)$ et

$G_i = (X_i, U_i)$ pour tout i ;

(3) $\Rightarrow$ (1) : soit $G = (X, U)$ et $G_i = (X_i, U_i)$ pour tout i ;
 notons φ_i l'application $\varphi_i : X \rightarrow X_i$ telle que
 $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x))$, et soit $G'_i = \varphi_i^{-1}(G_i)$ — i.e.
 G'_i est l'image réciproque de G_i par la $i^{\text{ème}}$ projection;
 on a clairement $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G'_i$, et chaque G'_i est un graphe
 de Ferrers (cf. pté 1, p. II-2).

REMARQUE 1 la démonstration de (1) $\Rightarrow$ (3) montre qu'on peut
 exiger dans la condition (3) du théorème que le
 plongement soit injectif.

Le théorème ci-dessus nous permet alors de poser :

DEFINITION [BOU]

La dimension Ferrers d'un graphe G , notée $d_F(G)$,
 est le plus petit entier k pour lequel l'une des
 conditions du théorème est vérifiée.

REMARQUE 2 la dimension Ferrers est définie pour tout graphe
 (en effet, un graphe ayant un arc au plus étant un
 graphe de Ferrers, pour tout graphe G , $\overline{G}$ est réunion d'au moins
 un ensemble de graphes de Ferrers).

2 - REDUCTION DU PROBLEME DE LA DIMENSION FERRERS A CELUI DE LA
 DIMENSION FERRERS DES GRAPHS BIPARTIS. LE B-ISOMORPHISME.

Soit $G = (X, U)$ un graphe et soient ρ, σ deux permutations de X . Notons $G_{\rho, \sigma} = (X, V)$ le graphe tel que $V = \{ \rho(x) \sigma(y) ; xy \in U \}$.

Il est clair que si G est un graphe de Ferrers, $G_{\rho, \sigma}$ l'est aussi (cf. cond. (F7bis), thm 1, p. I- 5). On peut généraliser ce résultat en montrant que $d_F(G) = d_F(G_{\rho, \sigma})$, pour tout G et pour tous ρ, σ .

Une manière de procéder consiste à associer à tout graphe G , de façon tout à fait classique, un graphe noté $B(G)$ et appelé le graphe biparti associé à G , et défini à un isomorphisme près de la façon suivante (les graphes bipartis (X, U) avec $X = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \emptyset$ et $U \subseteq Y \times Z$ seront classiquement notés (Y, Z, U)) :

- si $G = (X, U)$, soient respectivement $\sigma' : X \longrightarrow X'$ et $\sigma'' : X \longrightarrow X''$ deux bijections de X dans des ensembles X' et X'' supposés disjoints
- $X' \cup X''$ est l'ensemble des sommets de $B(G)$
- l'ensemble U^B des arcs de $B(G)$ est l'ensemble

$$U^B = \{ \sigma'(x) \sigma''(y) ; xy \in U \}$$

Les propriétés suivantes relatives aux graphes bipartis associés, sont alors élémentaires :

- $G \subseteq H \Rightarrow B(G) \subseteq B(H)$
- pour tout graphe biparti $H = (Y, Z, V)$ tel que $|Y| = |Z|$,
il existe un graphe G tel que $H = B(G)$
- G est un graphe de Ferrers ssi $B(G)$ est un graphe de Ferrers
- si $H = (X' \cup X'', V)$ est un graphe de Ferrers contenant $B(G)$,
alors $H' = (X', X'', V \cap (X' \times X''))$ est également un graphe de Ferrers contenant $B(G)$ (cf. pté 2, p. I-23)

On a alors le résultat suivant :

PROPRIETE 1

Pour tout graphe G , $d_F(G) = d_F(B(G))$

démonstration :

- si $G = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$ où les G_i sont des graphes de Ferrers,
alors $B(G) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} B(G_i)$, où les $B(G_i)$ sont également des graphes de Ferrers; donc $d_F(G) \geq d_F(B(G))$;
- réciproquement, si $B(G) = \bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i$ où les $H_i = (X' \cup X'', V_i)$ sont des graphes de Ferrers, posons $H'_i = (X', X'', V_i \cap (X' \times X''))$

et, en choisissant G'_i tel que $H'_i = B(G'_i)$, les H'_i et les G'_i sont des graphes de Ferrers et on a $G = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G'_i$;
 donc $d_F(G) \leq d_F(B(G))$.



Ainsi, on peut ramener l'étude de la dimension Ferrers des graphes quelconques à celle de la dimension Ferrers des graphes bipartis — et on peut remarquer que cette réduction est une réduction polynômiale au sens de [KAR] .

De plus, appelons B-isomorphes deux graphes G et H tels que $B(G)$ et $B(H)$ soient isomorphes.

La propriété ci-dessus permet clairement de conclure :

PROPRIÉTÉ 2 [BOU]

Deux graphes B-isomorphes ont même dimension Ferrers

Enfin, on peut encore caractériser la dimension Ferrers de la façon suivante :

PROPRIÉTÉ 3

Pour tout graphe G , $d_F(G)$ est le nombre minimum de graphes de Ferrers bipartis dont $B(G)$ — resp. $B(\overline{G})$ — est l'intersection — resp. la réunion .

démonstration :

la dernière des propriétés élémentaires relatives à $B(G)$

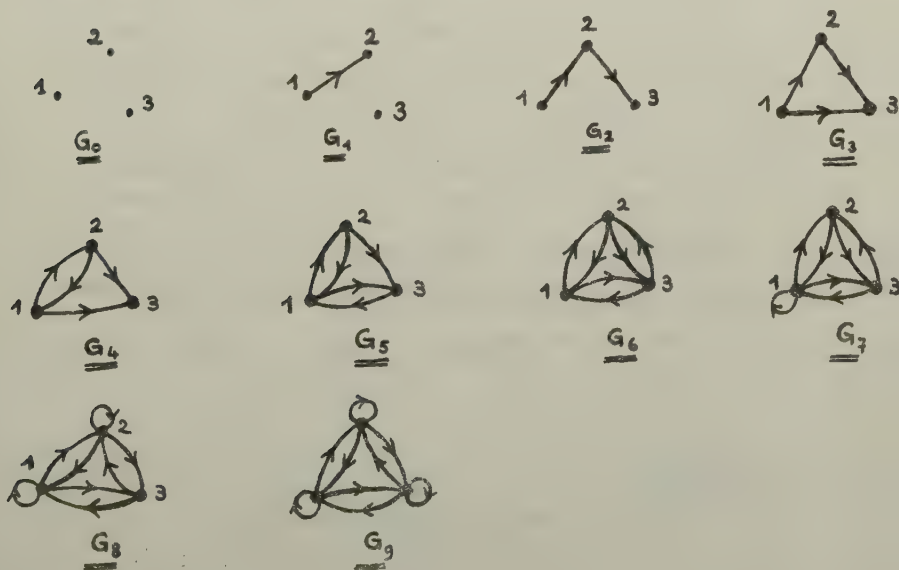
(cf. II - 6) énonce que tout graphe de Ferrers minimal contenant $B(G)$ est lui-même biparti; ceci suffit à prouver le résultat concernant $B(G)$;

le résultat concernant $B(\bar{G})$ résulte de ce que $d_F(G)$ est le nombre minimum de graphes de Ferrers dont $\bar{G}$ est la réunion, et de la première et de la troisième des propriétés élémentaires relatives à $B(G)$.

3 - QUELQUES PROPRIETES GENERALES DE LA DIMENSION FERRERS(A) - Monotonie de d_F relativement à la relation de sous-graphe

Ajouter un sommet isolé à un graphe ne change pas sa dimension Ferrers. Par contre, ajouter un arc à un graphe peut changer ou non sa dimension Ferrers, l'augmenter ou la diminuer.

Par exemple, considérons la suite $G_0, G_1, \dots, G_9$ des graphes donnés par la figure ci-dessous :



Cette suite est telle qu'on déduit G_i de G_{i-1} par adjonction d'un arc. Or on a :

$$d_F(G_0) = d_F(G_1) = 1$$

$$d_F(G_2) = 2$$

$$d_F(G_3) = 1$$

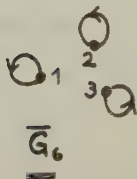
$$d_F(G_4) = d_F(G_5) = 2$$

$$d_F(G_6) = 3$$

$$d_F(G_7) = 2$$

$$d_F(G_8) = d_F(G_9) = 1$$

(montrons simplement que G_6 est de dimension Ferrers égale à 3 :



$\bar{G}_6$ est donné par la figure ci-contre ;
deux boucles disconnectées constituant
un 4-a-c-a, il faudra au moins trois
graphes de Ferrers pour recouvrir $\bar{G}_6$;
c'est manifestement suffisant)

Par contre, compte tenu du fait que tout sous-graphe d'un
graphe de Ferrers est un graphe de Ferrers (cf. pté. 1, p. I-23),
il est clair que la dimension Ferrers est monotone relativement à
la relation de sous-graphe :

PROPRIETE

Si G' est un sous-graphe de G , alors :

$$d_F(G') \leq d_F(G)$$

(B) - Conservation de la dimension Ferrers par plongement

La propriété 1 page II- 2 montre qu'un plongement transporte la dimension Ferrers lorsque celle-ci est égale à 1. En fait, le résultat est plus général :

PROPRIETE [BOU]

Si φ est un plongement de $G = (X, U)$ dans H , alors :

$$d_F(G) = d_F(H[\varphi(X)])$$

démonstration : posons $H[\varphi(X)] = H' = (Y, V)$

- si ψ est un plongement de H' dans un graphe K , alors il est clair que $\psi \circ \varphi$ est un plongement de G dans K ;
- soit ψ un plongement de G dans un graphe K ; pour tout $y \in Y$, choisissons un élément $x_y \in \varphi^{-1}(y)$ et posons $\psi'(y) = x_y$; il est clair que $\psi \circ \psi'$ est un plongement de H' dans K ;
- en utilisant la condition (3) du théorème page II-2, les deux points précédents montrent respectivement que $d_F(G) \leq d_F(H')$ et que $d_F(G) \leq d_F(H')$.

Ⓒ - Dimension Ferrers d'un produit strict de graphes de Ferrers

Soit G un graphe de dimension Ferrers égale à k . Alors il existe k graphes de Ferrers $G_1, \dots, G_k$ et un plongement φ de G dans $\prod_{1 \leq i \leq k} G_i$.

Par définition de d_F , on a évidemment $d_F(\prod_{1 \leq i \leq k} G_i) \leq k$.

D'autre part, compte tenu des propriétés pages II-10 et II-11, on a également :

$$k = d_F(G) = d_F(\varphi(G)) \leq d_F(\prod_{1 \leq i \leq k} G_i)$$

Par conséquent, $\prod_{1 \leq i \leq k} G_i$ est de dimension Ferrers égale à k .

Ainsi, il existe des produits stricts de k graphes de Ferrers de dimension Ferrers égale à k . Le résultat suivant montre qu'il en est de même de "presque" tous les produits stricts de graphes de Ferrers.

THEOREME

Soient $G_1, \dots, G_k$ k graphes de Ferrers, avec $k \geq 2$.

(i) si G_1 est vide, alors $d_F(\prod_{1 \leq i \leq k} G_i) = 1$

(ii) si G_1 est élémentaire, alors

$$d_F\left(\prod_{1 \leq i \leq k} G_i\right) = d_F\left(\prod_{2 \leq i \leq k} G_i\right)$$

(iii) si aucun G_i n'est élémentaire ni vide, alors

$$d_F\left(\prod_{1 \leq i \leq k} G_i\right) = k$$

démonstration :

(i) immédiat, puisqu'alors $\prod_{1 \leq i \leq k} G_i$ est lui-même un graphe vide;

(ii) comme $G_1 = (X_1, U_1)$ est un graphe de Ferrers élémentaire

(cf. p. I-41), on a $U_1 = X'_1 \cap X''_1$ avec $X'_1, X''_1 \subseteq X_1$;

posons $G = (X, U) = \prod_{1 \leq i \leq k} G_i$ et $G' = (Y, V) = \prod_{2 \leq i \leq k} G_i$;

soit $B(G)$ défini avec les mêmes notations qu'en page II-5 ,

c'est-à-dire que $B(G) = (X', X'', U^B)$ avec $U^B = \{\sigma'(x) \sigma''(y); xy \in U\}$

et posons de façon analogue $B(G') = (Y', Y'', V^B)$ avec

$V^B = \{\rho'(x) \rho''(y); xy \in V\}$;

appelons H le graphe obtenu en ajoutant à $B(G')$ un sommet

isolé s , c'est-à-dire que $H = (Y' \cup Y'' \cup \{s\}, V^B)$;

définissons $\varphi : X' \cup X'' \rightarrow Y' \cup Y'' \cup \{s\}$ par :

$$\sigma'(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightsquigarrow \begin{cases} \rho'(x_2, \dots, x_k) & \text{si } \Gamma_{G_1}^+(x_1) \neq \emptyset \\ s & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma''(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightsquigarrow \begin{cases} \rho''(x_2, \dots, x_k) & \text{si } \Gamma_{G_1}^-(x_1) \neq \emptyset \\ s & \text{sinon} \end{cases}$$

posons $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$; on a alors :

$$\begin{aligned} \sigma'(x) \sigma''(y) \in U^B &\iff x_i y_i \in U_i \text{ pour tout } i, 1 \leq i \leq k \\ &\iff \Gamma_{G_i}^+(x_i) \neq \emptyset \text{ et } \Gamma_{G_i}^-(y_i) \neq \emptyset \text{ et } x_i y_i \in U_i \\ &\text{pour tout } i, 1 \leq i \leq k \iff \varphi(\sigma'(x)) \varphi(\sigma''(y)) \in V^B \end{aligned}$$

donc φ est un plongement de $B(G)$ dans H ; comme φ est manifestement une application surjective, la propriété page II - 11 permet de conclure que $d_F(B(G)) = d_F(H)$; or $d_F(G) = d_F(B(G))$ et $d_F(G') = d_F(B(G'))$, en vertu de la propriété 1 page II - 6 , et $d_F(H) = d_F(B(G'))$ puisque les deux graphes ne diffèrent que par le sommet isolé s ; on a donc bien $d_F(G) = d_F(G')$;

(iii) posons $G_i = (X_i, U_i)$ pour tout $i, 1 \leq i \leq k$;

puisque G_i n'est pas un graphe de Ferrers élémentaire ni vide, il

existe $a_i, c_i \in X_i$ tels que $\emptyset \subset \Gamma_{G_i}^+(c_i) \subset \Gamma_{G_i}^+(a_i)$;

soient alors $b_i \in \Gamma_{G_i}^+(c_i)$ et $d_i \in \Gamma_{G_i}^+(a_i) - \Gamma_{G_i}^+(c_i)$;

on a donc $a_i b_i, a_i d_i, c_i b_i \in U_i$ et $c_i d_i \notin U_i$; posons alors :

$$\begin{cases} x_i = (a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \\ y_i = (b_1, \dots, b_{i-1}, d_i, b_{i+1}, \dots, b_k) \end{cases}$$

posons $\prod_{1 \leq i \leq k} G_i = G = (X, U)$;

il est clair que $x_i y_i \notin U$, puisque $c_i d_i \notin U_i$; mais il est aisé de constater que, par contre, pour tout $j \neq i, 1 \leq j \leq k$, on a $x_i y_j \in U$;

on en déduit donc que (x_i, y_i, x_j, y_j) est un 4-a-c-a de $\bar{G}$, pour tous $i, j, 1 \leq i \neq j \leq k$;

donc $x_i y_i$ et $x_j y_j$ ne peuvent appartenir à un même graphe de Ferrers inclus dans $\bar{G}$ et, par conséquent, $\bar{G}$ ne peut être la réunion de moins de k graphes de Ferrers; on en déduit que $d_F(G) \geq k$; or, par définition de d_F , on a $d_F(G) \leq k$.

On peut en particulier déduire du théorème ci-dessus :

COROLLAIRE

Pour tout entier k , il existe des graphes de dimension Ferrers égale à k .

- ① - Une borne élémentaire pour $d_F(G)$ et caractérisation des graphes G tels que $d_F(G) = n(G)$.

Du fait que la dimension Ferrers d'un graphe G est égale au plus petit nombre de graphes de Ferrers dont $\bar{G}$ est la réunion, et du fait que les graphes n'ayant qu'un seul arc sont des graphes de Ferrers, on obtient très simplement une majoration de la dimension Ferrers.

PROPRIETE 1

Pour tout graphe G , $d_F(G) \leq n^2(G) - |U|$

Cette majoration de $d_F(G)$ est le plus souvent très grossière, mais elle est la meilleure possible en général, en ce sens que pour toutes valeurs de $n(G)$ et de $|U|$ fixées, il existe des graphes G pour lesquels cette inégalité est une égalité.

Nous montrerons ce fait après avoir étudié une autre majoration immédiate de $d_F(G)$, également très grossière, mais également la meilleure possible en général.

Pour tout sommet x d'un graphe $G = (X, U)$, appelons faisceau sortant (resp. faisceau entrant) le graphe noté $F_G^+(x)$ (resp. $F_G^-(x)$) tel que $F_G^+(x) = (X, U_x^+)$ où U_x^+ est l'ensemble des arcs de G d'origine x (resp. (X, U_x^-) où U_x^- est l'ensemble des arcs de G d'extrémité x).

Il est évident que $F_G^+(x)$ et $F_G^-(x)$ sont des graphes de Ferrers et que $\bar{G} = \bigcup_{x \in X} F_G^+(x) = \bigcup_{x \in X} F_G^-(x)$. Par conséquent :

PROPRIETE 2

Pour tout graphe G , $d_F(G) \leq n(G)$

Le résultat suivant donne une caractérisation des graphes pour lesquels l'inégalité de la majoration donnée par la propriété 2 ci-dessus est une égalité.

Rappelons qu'un circuit élémentaire d'un graphe $G = (X, U)$ est une suite $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ de sommets de G tous différents sauf $x_0 = x_p$, vérifiant la condition $\forall i \in [1, p] \quad x_{i-1}x_i \in U$ — en particulier, les boucles sont des circuits élémentaires.

PROPRIÉTÉ 3

Pour tout graphe G , $d_F(G) = n(G)$ ssi les composantes connexes de $\bar{G}$ sont réduites à des circuits élémentaires (avec $n(G) \geq 2$).

démonstration : posons $n = n(G)$;

- supposons que $\bar{G}$ n'admette comme composantes connexes que des circuits élémentaires ;
soient $u = ab$ et $v = cd$ deux arcs de $\bar{G}$; que u et v soient ou non sur un même circuit, si $u \neq v$, alors (a, b, c, d) est un 4-a-c-a de $\bar{G}$; donc u et v ne peuvent appartenir à un même graphe de Ferrers inclus dans $\bar{G}$; on en déduit donc que $d_F(G) \geq n$;

- supposons maintenant que les composantes connexes de $\bar{G}$ ne soient pas toutes réduites à des circuits élémentaires;

s'il existe dans $\bar{G}$ un sommet x tel que $d^+(x) = 0$ ou $d^-(x) = 0$, la justification de la propriété 2 ci-dessus montre que $d_F(G) \leq n-1$;

supposons donc que tous les sommets de $\bar{G}$ ont leurs deux demi-degrés non nuls; alors il existe un sommet x dont l'un au moins des demi-degrés dans $\bar{G}$ est supérieur à 1;

supposons, par exemple, que $d^+(x) \geq 2$;

1^{er} cas : pour tout $z \in F_G^+(x)$ on a $F_G^-(z) \supset \{x\}$

alors, pour $y \neq x$, appelons G_y le graphe $F_G^+(y)$ augmenté de l'arc xz si $z \in F_G^+(y)$; on constate que G_y est un graphe de Ferrers inclus dans $\bar{G}$ et que $\bar{G} = \bigcup_{y \neq x} G_y$;
donc $d_F(G) \leq n-1$;

2^{ème} cas : il existe $z \in F_G^+(x)$ tel que $F_G^-(z) = \{x\}$ et il existe $t \in F_G^+(x)$ tel que $F_G^-(t) \supset \{x\}$

appelons G_t le graphe $F_G^-(t)$ augmenté de l'arc xz ; on constate que G_t est un graphe de Ferrers inclus dans $\bar{G}$ et que $\bar{G} = G_t \cup \left(\bigcup_{y \neq t, z} F_G^-(y) \right)$;

donc $d_F(G) \leq n-1$;

3^{ème} cas : pour tout $z \in \Gamma_G^+(x)$ on a $\Gamma_G^-(z) = \{x\}$

on constate que $\bar{G} = F_G^+(x) \cup \left(\bigcup_{y \notin \Gamma_G^+(x)} F_G^-(y) \right)$;

comme $d^+(x) \geq 2$, on a $d_F(G) \leq n-1$;

- la propriété 2 ci-dessus permet d'achever la démonstration.

Ainsi, cette dernière propriété montre comment fabriquer des graphes de dimension Ferrers aussi grande que l'on veut, en utilisant le minimum de sommets possibles.

En fait, on remarque que les graphes G satisfaisant $d_F(G) = n(G)$ sont tous B -isomorphes entre eux: ce sont les graphes G tels que $B(G)$ soit le complémentaire d'un couplage parfait.

De plus, la démonstration de la propriété 3 ci-dessus montre que la majoration indiquée par la propriété 1 page II - 16 est bien la meilleur possible en général: tout graphe G tel que $B(\bar{G})$ soit un couplage vérifie $d_F(G) = n^2(G) - |U|$.

E - Factorisation de la dimension Ferrers grâce à des notions de connexité.

Pour toute composante connexe G' de G , on a $d_F(G') \leq d_F(G)$ (cf. pté p. II - 10). Le résultat suivant montre qu'on peut ramener le calcul de $d_F(G)$ à celui de la dimension Ferrers de ses composantes connexes.

PROPRIÉTÉ 1

Soient $G_1, \dots, G_k$ les composantes connexes non réduites à un sommet non bouclé d'un graphe G , $k \geq 2$.

Alors :

$$d_F(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{2, d_F(G_i)\}$$

Nous allons d'abord prouver un lemme.

Soient k graphes $G_1, \dots, G_k$ avec $G_i = (X_i, U_i)$, et tels que les X_i soient disjoints deux à deux. Posons $X = \bigcup_{1 \leq i \leq k} X_i$.

Soit $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ une permutation de l'ensemble

$\{1, 2, \dots, k\}$. Notons $\mathcal{J}(G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k})$ le graphe (X, W) où

$$W = \left(\bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i \right) \cup \{xy; x \in X_{i_p}, y \in X_{i_q}, p < q\}.$$

(cette opération est celle, désormais classique, de joint d'une famille de graphes, utilisée ici dans le cas particulier de joint par un ordre total)

LEMME

Si $G_1, G_2, \dots, G_k$ sont des graphes de Ferrers, alors, pour toute permutation $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$, $\bigcup (G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_k})$ est également un graphe de Ferrers.

démonstration : supposons pour simplifier les notations que la permutation $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ est la permutation $(1, 2, \dots, k)$ et posons $G = \bigcup (G_1, G_2, \dots, G_k)$;

si $x \in X_p$, on a $\Gamma_G^+(x) = \Gamma_{G_p}^+(x) \cup \left(\bigcup_{p < i \leq k} X_i \right)$;

soit $y \in X_q$ avec $1 \leq q \leq k$; si $p < q$, $\Gamma_G^+(x) \supset \Gamma_G^+(y)$ par définition de G , et si $p = q$, $\Gamma_{G_i}^+(x)$ et $\Gamma_{G_i}^+(y)$ sont ordonnés par inclusion puisque G_i est un graphe de Ferrers (cf. cond. (F8), thm 1, p. I-5) ; il en est donc de même de $\Gamma_G^+(x)$ et de $\Gamma_G^+(y)$, ce qui, en vertu de la même condition, achève la démonstration.

démonstration de la propriété 1 :

- supposons que chaque composante connexe $G_i = (X_i, U_i)$ soit un graphe de Ferrers ;
d'après les hypothèses, il existe au moins $ab \in U_i$ et $cd \in U_j$ avec $i \neq j$;

il est clair que (a, b, c, d) est un 4-a-c-a de G , qui n'est donc pas un graphe de Ferrers;

d'autre part, il est également clair que :

$$G = \bigcup (G_1, G_2, \dots, G_k) \cap \bigcup (G_k, G_{k-1}, \dots, G_1) ;$$

compte tenu du lemme ci-dessus, on a $d_F(G) = 2$;

- supposons maintenant que l'une au moins des composantes connexes G_i ne soit pas un graphe de Ferrers;

pour tout i , supposons que $G_i = \bigcap_{1 \leq j \leq k_i} G_i^j$, où les G_i^j sont des graphes de Ferrers;

soit alors $h = \max_{1 \leq i \leq k} \{k_i\}$, et, pour tout i , si $k_i \leq j \leq h$,

posons $G_i^j = G_i^{k_i}$;

soit $\mathcal{H} = \left\{ \bigcup (G_k^1, G_{k-1}^1, \dots, G_1^1) \right\} \cup \left\{ \bigcup (G_1^j, G_2^j, \dots, G_k^j) ; 2 \leq j \leq h \right\}$;

on a alors $G = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$ et donc, compte tenu du lemme

ci-dessus, $d_F(G) \leq h$;

on en déduit que $d_F(G) \geq \max_{1 \leq i \leq k} \{d_F(G_i)\}$; or on a aussi

$2 \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{d_F(G_i)\} \leq d_F(G)$, la dernière inégalité résultant

de ce que les G_i sont des sous-graphes de G (cf. pté p. II-10).

Ainsi, la propriété 1 ci-dessus permet de limiter l'étude de la dimension Ferrers à celle de la dimension Ferrers des seuls graphes connexes.

En fait, puisque $d_F(G) = d_F(B(G))$ (cf. pté 1, p. II - 6), il peut être utile d'appliquer la propriété 1 ci-dessus à $B(G)$.

Par exemple, si G est un chemin élémentaire de longueur supérieure ou égale à 2, G est connexe, mais $B(G)$ ne l'est pas : chaque composante connexe de $B(G)$ est réduite à un seul arc, et cette propriété 1 permet immédiatement de conclure que $d_F(G) = d_F(B(G)) = 2$.

Or le rapport entre les composantes connexes de G et celles de $B(G)$ sont simples à établir.

Soient $H_1 = (Y_1, V_1), \dots, H_p = (Y_p, V_p)$ les composantes connexes de $B(G)$. A chaque ensemble V_i , il correspond, via la correspondance entre les arcs de G et ceux de $B(G)$, un ensemble U_i d'arcs de G . Soit alors X_i l'ensemble des sommets de G touchés par au moins un arc de U_i (i.e. l'ensemble des sommets qui sont origine ou extrémité d'au moins un arc de U_i).

On dit alors que $G_i = (X_i, U_i)$ est une composante B-connexe de G (appelée composante alternative dans [HAB]).

Appelons anti-chemin d'un graphe $G = (X, U)$, de façon usuelle, toute suite $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ de sommets de G satisfaisant :

$$x_{2i}x_{2i+1} \in U \text{ pour } 0 \leq 2i < k \text{ et } x_{2i}x_{2i-1} \in U, \text{ pour } 0 < 2i \leq k$$

$$\text{ou bien } x_{2i+1}x_{2i} \in U \text{ pour } 0 \leq 2i < k \text{ et } x_{2i-1}x_{2i} \in U \text{ pour } 0 < 2i \leq k ;$$

Le résultat suivant est alors immédiat :

PROPRIÉTÉ 2

Deux sommets appartiennent à une même composante B-connexe d'un graphe G ssi ils sont reliés par un anti-chemin de G .

Les composantes B-connexes de G déterminent une partition de l'ensemble des arcs de G , et toute composante connexe de G est réunion des composantes B-connexes qu'elle contient.

REMARQUE

Les anti-chemins de la propriété 2 ne sont pas nécessairement élémentaires.

En particulier, pour tout graphe réflexif, par exemple pour les ordres, il y a identité entre les composantes connexes et les composantes B-connexes.

Etant donné que si G' est une composante B-connexe de G , alors $B(G')$ est, éventuellement à quelques sommets isolés près, une composante connexe de $B(G)$, les deux propriétés précédentes jointes à la propriété 1 page II - 6 permettent d'énoncer :

PROPRIÉTÉ 3

Soient $G_1, \dots, G_k$ les composantes B-connexes d'un graphe G , avec $k \geq 2$. Alors :

$$d_F(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{ 2, d_F(G_i) \}$$

Ainsi, la propriété ci-dessus permet de limiter l'étude de la dimension Ferrers des graphes à celle de la dimension Ferrers des graphes qui sont B-connexes.

Maintenant, du fait que $d_F(G)$ peut s'obtenir par recouvrement de $\bar{G}$ ou de $B(\bar{G})$ (cf. déf., p. II-4, et pté 3, p. II-7) par des graphes de Ferrers, lesquels sont connexes aux sommets isolés près, on peut chercher à ramener la détermination de $d_F(G)$ à celle du nombre minimum de graphes de Ferrers recouvrant chacune des composantes connexes de $\bar{G}$ ou de $B(\bar{G})$. Ces composantes déterminant des partitions des arcs de $\bar{G}$; la seconde étant plus fine que la première, c'est à cette dernière que nous nous intéresserons.

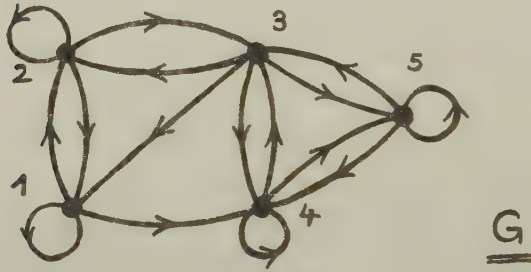
Soit $G = (X, U)$ un graphe, et reprenons pour $B(G)$ les notations de la page II-5.

Soit alors $H_i = (X'_i, X''_i, V_i)$, pour $1 \leq i \leq k$, les composantes connexes non réduites à un sommet isolé de $B(\bar{G})$. A chaque H_i , associons un sous-graphe partiel $G_i = (X_i, U_i)$ de G , défini de la façon suivante :

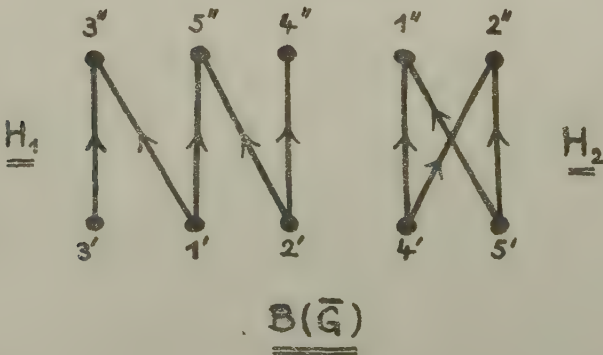
$$\left\{ \begin{array}{l} X_i = \sigma'^{-1}(X_i') \cup \sigma''^{-1}(X_i'') \\ U_i = \{xy; \sigma'(x) \sigma''(y) \notin V_i\} \end{array} \right\}$$

On appelle composante B-c-connexe de G les sous-graphes partiels G_i .

Par exemple, soit G le graphe de la figure ci-dessous :



$B(\bar{G})$ admet alors deux composantes connexes données par la figure ci-dessous, soient H_1 et H_2 :



Et H_1 et H_2 déterminent sur G les composantes B-c-connexes G_1 et G_2 données par la figure ci-dessous :



(ainsi, on constate qu'une composante B-c-connexe peut être un graphe vide)

On a alors le résultat suivant :

PROPRIETE 4

Soit G un graphe non complet, et soient $G_1, \dots, G_k$ ses composantes B-c-connexes. Alors :

$$d_F(G) = \sum_{i=1}^k d_F(G_i)$$

démonstration :

$d_F(G)$ est le nombre minimum de graphes de Ferrers bipartis dont $B(\tilde{G})$ est la réunion (cf. pté 3, p. II-7) ;

les graphes de Ferrers étant connexes aux sommets isolés près,
un tel recouvrement de $B(\bar{G})$ est nécessairement une union disjointe
de recouvrements de cardinal minimum des composantes connexes
 $H_1, \dots, H_k$ de $B(\bar{G})$ par des graphes de Ferrers bipartis;

chaque composante connexe $H_i = (X_i', X_i'', V_i)$ de $B(\bar{G})$ détermine une
composante B-c-connexe $G_i = (X_i, U_i)$ de G (avec donc
 $X_i = \sigma'^{-1}(X_i') \cup \sigma''^{-1}(X_i'')$);
posons $Y_i' = \sigma'(X_i')$ et $Y_i'' = \sigma''(X_i'')$;

pour tout graphe biparti $K_i = (Z_i', Z_i'', W_i)$, avec $Z_i' \subseteq X_i'$ et
 $Z_i'' \subseteq X_i''$, posons $\theta_c(K_i) = (Y_i', Y_i'', W_i)$, où
 $W_i = W_i \cup ((Y_i' - X_i') * Y_i'') \cup (Y_i'' * (Y_i'' - X_i''))$; on a alors, en
particulier, $\theta_c(H_i) = B(\bar{G}_i)$;

on constate en outre que :

$$\bullet \quad H_i = \bigcup_{1 \leq j \leq k_i} K_i \implies \theta_c(H_i) = \bigcup_{1 \leq j \leq k_i} \theta_c(K_i)$$

- K_i est un graphe de Ferrers ssi $\theta_c(K_i)$ est un graphe de Ferrers
en effet, de droite à gauche, c'est une conséquence
de la propriété 2 page I - 23, et, de gauche à droite :
si (x, y, z, t) est un 4-a-c-a de $\theta_c(K_i)$, alors
 $xt, zy \notin W_i'$, donc $x, z \notin Y_i' - X_i'$ et $y, t \notin Y_i'' - X_i''$;
on déduit donc de $xy, zt \in W_i'$ que $xy, zt \in W_i$, et donc
que (x, y, z, t) est un 4-a-c-a de K_i , ce qui contredit
l'hypothèse faite sur K_i ;

on en conclut que le plus petit nombre de graphe de Ferrers bipartis recouvrant H_i est égal au plus petit nombre de graphes de Ferrers bipartis recouvrant $\Theta_i(H_i)$, et, comme $\Theta_i(H_i) = B(\bar{G}_i)$, ce nombre est $d_F(G_i)$, en vertu de la propriété 3 page II-7 ;

$$\text{on a donc bien } d_F(G) = \sum_{1 \leq i \leq k} d_F(G_i) .$$

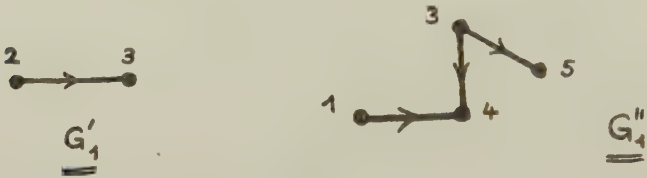


Ainsi, si G est le complémentaire d'un circuit élémentaire de longueur n , les n composantes connexes H_i de $B(\bar{G})$ sont chacune réduite à un arc, et chacune des n composantes B-c-connexes G_i de G est un graphe vide. On déduit donc de la propriété 4 ci-dessus que $d_F(G) = n(G)$, retrouvant une partie de ^{la} propriété 3 page II-17 alors que l'application d'une propriété analogue à la propriété 4, mais faisant intervenir les sous-graphes de G induits par les composantes connexes de $\bar{G}$ aurait été sans effet, puisque $\bar{G}$ est connexe.

La propriété 4 ci-dessus permet de limiter l'étude de la dimension Ferrers à celle de la dimension Ferrers des graphes qui sont B-c-connexes.

En fait, on peut l'utiliser "en bascule" avec la propriété 3 page II-25 : en reprenant l'exemple de la page II-26, on constate que si G_1 est connexe, $B(G_1)$ ne l'est pas; le calcul de $d_F(G_1)$ peut donc se ramener à celui de la dimension Ferrers de ses composantes

B-c-connexes G'_1 et G''_1 données par la figure ci-dessous :



On a alors successivement :

$$d_F(G'_1) = d_F(G''_1) = 1$$

$$d_F(G_1) = 2 \quad (\text{pté } 3)$$

$$d_F(G_2) = 1$$

$$d_F(G) = 3 \quad (\text{pté } 4)$$

Nous montrerons au chapitre IV, paragraphe 3 p. 7, qu'il existe pour les graphes transitifs, une factorisation plus fine que celle procurée par la propriété 4 ci-dessus.

4 - TENTATIVE DE REDUCTION DU PROBLEME DE LA DIMENSION FERRERS

A CELUI DE LA DIMENSION FERRERS DES ORDRES DE HAUTEUR 1

Soit $B^r(G)$ la fermeture réflexive de $B(G)$. Le résultat suivant a été obtenu en collaboration avec A. Cazes et M. Habib.

THEOREME

Pour tout graphe G ,

$$d_F(G) \leq d_F(B^r(G)) \leq d_F(G) + 1$$

démonstration : soit $G = (X, U)$ et conservons pour $B(G)$ les notations de la page II - 5 ;

$$\bullet \quad d_F(G) \leq d_F(B^r(G))$$

en vertu de la propriété 1 page II - 6 , on a $d_F(G) = d_F(B(G))$

et, en appliquant la propriété 2 page I - 23 , on obtient

$$d_F(B(G)) \leq d_F(B^r(G)) ;$$

$$\bullet \quad d_F(B^r(G)) \leq d_F(G) + 1$$

soit $G = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$, les $G_i = (X_i, U_i)$ étant des graphes de Ferrers.

en vertu de la condition (F5) du théorème 1 page I-5 ,
 pour tout i , il existe deux applications $f_1^i, f_2^i : X_i \longrightarrow \mathbb{N}$
 telles que : $\forall x, y \in X_i \quad xy \in U_i \iff f_1^i(x) < f_2^i(y)$; on
 peut de plus supposer, sans perte de généralité, que les
 images par f_1^i et f_2^i soient toutes différentes, autrement dit,
 en posant $E_i = f_1^i(X_i) \cup f_2^i(X_i)$, on peut exiger que $|E_i| = 2 |X_i|$;
 on peut alors définir une bijection $\lambda_i : X' \cup X'' \longrightarrow E_i$
 en posant :

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} f_1^i(\sigma^{-1}(x)) & \text{si } x \in X' \\ f_2^i(\sigma''^{-1}(x)) & \text{si } x \in X'' \end{cases}$$

soit alors τ_i l'ordre total induit sur $X' \cup X''$, via la
 bijection λ_i , par l'ordre naturel sur E_i ; il est clair que
 $B^r(G) \subset \tau_i$;

soit maintenant τ l'ordre total défini sur $X' \cup X''$ de la
 façon suivante :

- $\forall x \in X' \quad \forall y \in X'' \quad xy \in \tau$
- $\forall x, y \in X' \quad xy \in \tau \iff yx \in \tau_1$
- $\forall x, y \in X'' \quad xy \in \tau \iff yx \in \tau_1$

il est également clair que $B^r(G) \subset \tau$;

par conséquent, $B^r(G) \subseteq \tau \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k} \tau_i \right)$;

soit maintenant $xy \in \tau \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k} \tau_i \right)$, avec $x \neq y$;

comme $xy \in \tau \cap \tau_1$, on a nécessairement $x \in X'$ et $y \in X''$;

comme $xy \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} \tau_i$, on a $\lambda_i(x) < \lambda_i(y)$ pour tout i ;

donc $\sigma'^{-1}(x) \sigma''^{-1}(y) \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i = U$, et, par conséquent, xy est un arc de $B(G)$;

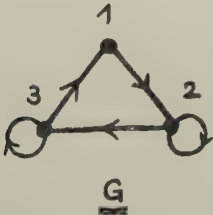
on a donc $B^T(G) = \tau \cap \left(\bigcup_{1 \leq i \leq k} \tau_i \right)$; les ordres totaux

étant des graphes de Ferrers, l'inégalité annoncée est bien démontrée.



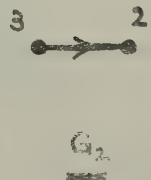
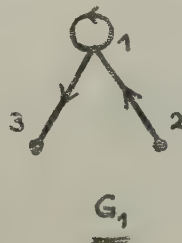
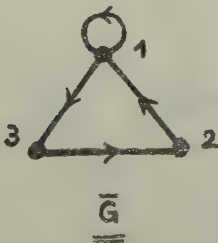
Remarquons tout d'abord que la double inégalité fournie par le théorème est le meilleur résultat possible en général.

exemple 1

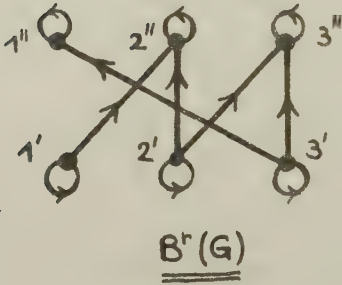


G n'est pas un graphe de Ferrers car $(1,2,3,1)$ est un 4-a-c-a de G

mais $d_F(G) = 2$, car $\bar{G} = G_1 \cup G_2$, avec :



d'autre part, on a :



$$\text{et } d_F(B^r(G)) = 2$$

car $B^r(G)$ est l'intersection
de deux ordres totaux :

$$\tau_1 = 3' \ 1'' \ 2' \ 3'' \ 1' \ 2''$$

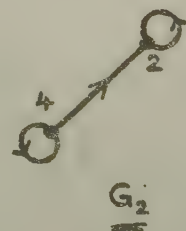
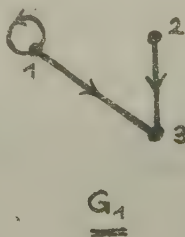
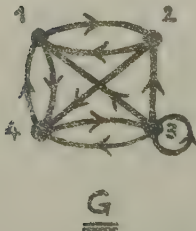
$$\tau_2 = 1' \ 2' \ 2'' \ 3' \ 3'' \ 1''$$

exemple 2

si G est un graphe de Ferrers, on a nécessairement

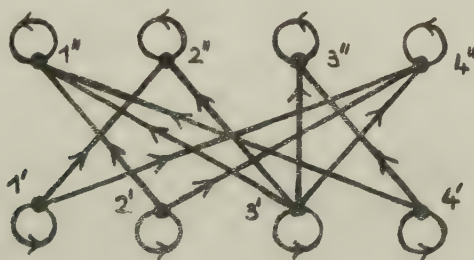
$d_F(B^r(G)) = 2 = d_F(G) + 1$, puisque, si $x, y \in X'$ par exemple, $x \neq y$,
alors (x, x, y, y) est un 4-a-c-a de $B^r(G)$;

mais l'exemple ci-dessous montre que l'inégalité entre $d_F(G)$
et $d_F(B^r(G))$ peut se produire dans d'autres cas ;



G n'est pas un graphe de Ferrers car, par exemple, $(1,2,4,3)$ est un 4-a-c-a de G ; comme $\bar{G} = G_1 \cup G_2$, on a $d_F(G) = 2$;

d'autre part :



$B^r(G)$

avec $d_F(B^r(G)) > 2$:

en effet, considérons la suite d'arcs de $\overline{B^r(G)}$

$$\gamma = (3'2', 2'2'', 1'1'', 4'4'', 2'3'', 3'2') = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 = u_1) ;$$

on constate, en posant $u_i = x_i y_i$, que pour $1 \leq i \leq 5$,

$(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1})$ est un 4-a-c-a de $\overline{B^r(G)}$; donc, si $\overline{B^r(G)}$

est réunion de deux graphes de Ferrers H_1 et H_2 , et si u_i

est un arc de H_1 , alors u_{i+1} est un arc de H_2 ; comme

$u_6 = u_1$, on est manifestement amené à une contradiction

(cet argument sera systématiquement au chapitre III conduisant

à un théorème de caractérisation des graphes de dimension

Ferrers égale à deux);

Le théorème ci-dessus étant le meilleur possible en général, une façon de tourner la difficulté, et donc de ramener l'étude de la dimension Ferrers de tout graphe à celle des ordres de hauteur 1, consisterait à savoir a priori comment choisir parmi les deux valeurs possibles de $d_F(B^F(G))$.

PROBLEME

Caractériser les graphes G pour lesquels on a

$$d_F(G) = d_F(B^F(G))$$

Signalons que ce problème est toujours un problème ouvert même dans le cas où G est lui-même un ordre: nous montrerons au chapitre V que le théorème ci-dessus généralise un résultat dû à R. Kimble (cf. thm 4, p. V-15), qui reste, à notre connaissance, le meilleur résultat connu dans le cadre de la théorie de la dimension des ensembles ordonnés (sur le résultat dû à R. Kimble, cf. [TRO-MOO, b]).

CHAPITRE III

F-INCOMPATIBILITE ET F-EXTENSIBILITE

1 - LES GRAPHS DE F-INCOMPATIBILITE

Lorsqu'on est amené à déterminer directement la dimension Ferrers d'un graphe donné, on procède en montrant :

- qu'il existe k graphes de Ferrers pour lesquels l'une des conditions du théorème page II - 2 est satisfaite
- que pour tout entier $k' < k$, un tel résultat est impossible.

Le plus souvent, pour établir ce deuxième point, il est commode de minorer le nombre de graphes de Ferrers dont le complémentaire du graphe donné peut être réunion (cf. cond. (2), thm p. II - 2).

C'est en particulier la démarche que nous avons adoptée pour déterminer la dimension Ferrers d'un produit strict de graphes de Ferrers (cf. thm p. II - 12), celle des graphes dont le complémentaire est une réunion disjointe de circuits élémentaires (cf. pté 3, p. II - 17), ou encore pour montrer que le graphe $B^I(G)$ de la page II - 35 est de dimension Ferrers supérieure à 2 .

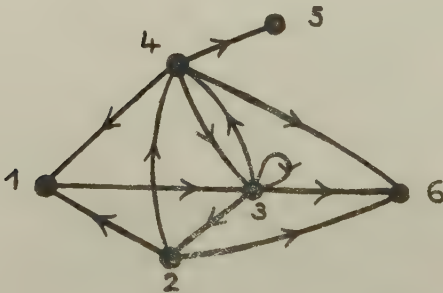
Nous allons systématiser cette démarche.

Soit $H = (Y, V)$ un graphe quelconque. Appelons F-incompatibles dans H les arcs $xy, zt \in V$ tels que $xt, zy \notin V$ (autrement dit,

(x,y,z,t) est un 4-a-c-a de H), ce qu'on note $\underline{xy \star^H zt}$.

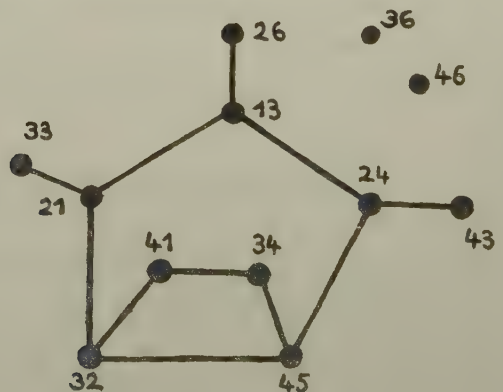
Une façon de prendre en compte l'ensemble des F-incompatibilités est de définir le graphe simple (i.e. non orienté, sans boucle ni arêtes multiples) H^* , appelé graphe des F-incompatibilités associé à H , dont les sommets sont les arcs de H , et tel que deux de ses sommets $xy \in V$ et $zt \in V$ soient adjacents ssi ils sont F-incompatibles dans H .

exemple :



$$\underline{\underline{H = (V, V)}}$$

$$H^* = (V, V^*)$$



REMARQUE 1

Il est clair que si H_1 et H_2 sont B-isomorphes, alors H_1^* et H_2^* sont isomorphes.

En particulier, pour tout graphe G , on a $(\bar{G})^* \cong (G^d)^*$ puisque $G^d = (\bar{G})^-$.

Supposons maintenant que $H = \bigcup_{1 \leq i \leq k} H_i$, où les $H_i = (V_i, V_i)$ sont des graphes de Ferrers.

Il est alors clair que si $xy \in H$, xy et zt ne peuvent appartenir à un même V_i .

Il en découle que chaque V_i est nécessairement un ensemble stable pour H^* (c'est-à-dire que le sous-graphe de H^* engendré par V_i est vide).

Autrement dit, en désignant par γ le nombre chromatique (si G est un graphe simple, $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un recouvrement des sommets de G par des ensembles stables), le résultat suivant est immédiat :

THEOREME

Pour tout graphe G , on a

$$d_F(G) \geq \gamma((\bar{G})^*) = \gamma((G^d)^*)$$

REMARQUE 2

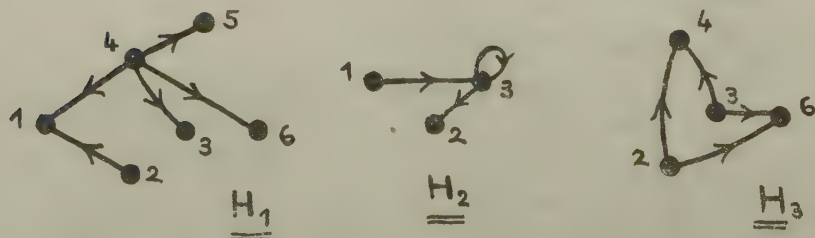
En particulier, on a montré que le produit strict G de k graphes de Ferrers non élémentaires avait une dimension Ferrers au moins égale à k , en exhibant une clique (graphe simple complet) à k sommets comme sous-graphe de $\overline{G}^*$ (cf. thm p. II-12).

De même, on a montré que le complémentaire G d'une réunion disjointe de circuits élémentaires sur n sommets était de dimension Ferrers au moins égale à n en constatant que $\overline{G}^*$ était une clique à n sommets (cf. pté 3, p. II-17).

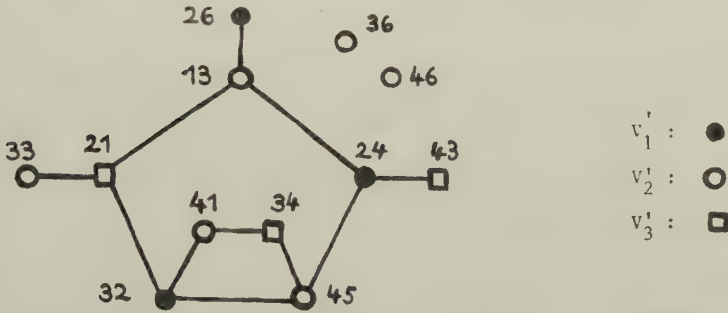
Enfin, pour l'exemple de la page II-35 , on a montré que $\chi(\overline{(B^F(G))^*}) > 2$ en exhibant un cycle impair de $\overline{(B^F(G))^*}$.

Cependant, l'égalité éventuelle entre $d_F(G)$ et $\chi(\overline{(G)^*})$ n'est absolument pas évidente.

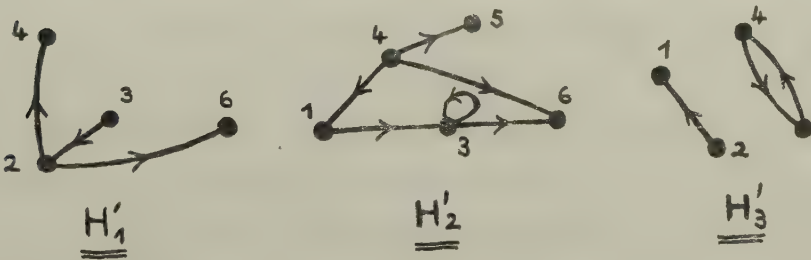
En effet, on constate bien que les graphes de Ferrers H_1 , H_2 et H_3 donnés par la figure ci-dessous recouvrent le graphe H de l'exemple précédent, et leurs ensembles respectifs d'arcs V_1 , V_2 et V_3 sont des ensembles stables pour H^* .



Par contre, on peut recouvrir les sommets du même graphe H^* par trois ensembles stables V'_1 , V'_2 et V'_3 donnés par la figure ci-dessous :



qui induisent respectivement les trois sous-graphes partiels de H , $H'_1 = (Y, V'_1)$, $H'_2 = (Y, V'_2)$ et $H'_3 = (Y, V'_3)$ donnés par la figure ci-dessous:



dont aucun n'est un graphe de Ferrers, car :

- $32 \overset{H'_1}{*} 24$ et $32 \overset{H'_1}{*} 26$
- $13 \overset{H'_2}{*} 41$, $13 \overset{H'_2}{*} 45$, $13 \overset{H'_2}{*} 46$, $33 \overset{H'_2}{*} 41$ et $33 \overset{H'_2}{*} 45$
- $21 \overset{H'_3}{*} 43$, $21 \overset{H'_3}{*} 34$ et $43 \overset{H'_3}{*} 34$

Certes, on peut étendre H'_1 en un sous-graphe partiel H''_1 de H qui soit un graphe de Ferrers en posant $V''_1 = V'_1 \cup \{34, 36\}$ (on aura alors $H'_1 \subset H''_1 \subset H$ et H''_1 est bien un graphe de Ferrers car alors $\Gamma^+(3) \supset \Gamma^+(2) \supset \Gamma^+(4) = \Gamma^+(6)$).

Certes, on peut étendre H'_2 en un sous-graphe partiel H''_2 de H qui soit un graphe de Ferrers en posant $V''_2 = V'_2 \cup \{43\}$ (on aura alors $H'_2 \subset H''_2 \subset H$ et H''_2 est bien un graphe de Ferrers car alors $\Gamma^+(4) \supset \Gamma^+(3) \supset \Gamma^+(1) \supset \Gamma^+(5) = \Gamma^+(6)$).

Mais il n'existe aucun sous-graphe partiel H''_3 de H qui soit un graphe de Ferrers satisfaisant $H'_3 \subset H''_3 \subset H$:

en effet, on a, par exemple, $21 \overset{H'_3}{*} 43$; il faudrait donc, si $H''_3 = (Y, V''_3)$, que $41 \in V''_3$ (puisque $23 \notin V$); mais alors $41 \overset{H''_3}{*} 34$, et aucun sur-graphe de H''_3 contenu dans H ne peut être un graphe de Ferrers puisque $31, 44 \notin V$.

Nous pouvons exprimer nos conclusions de la façon suivante.

Si $H = (Y, V)$ est un graphe quelconque, appelons F-extensible dans H tout sous-ensemble $V' \subseteq V$ tel que, en posant $H' = (Y, V')$, il existe un graphe de Ferrers $H'' = (Y, V'')$ satisfaisant $H' \subseteq H'' \subseteq H$.

Alors tout recouvrement de V par des ensembles F-extensibles dans H est un recouvrement de H^* par des ensembles stables pour H^* (ce qu'exprime le théorème page III-3), tandis que la réciproque est fausse (y compris dans le cas de recouvrements de V , de cardinal minimum, par des ensembles stables pour H^* , puisque c'est précisément le cas de l'exemple précédent : on constate aisément que $\gamma(H^*) = 3$), ce qui n'infirme évidemment pas l'égalité possible de $\gamma(\bar{G}^*)$ avec $d_F(G)$.

En particulier, il est clair que $d_F(G) = 1$ ssi $\gamma(\bar{G}^*) = 1$, ce qui permet de déduire du théorème précédent que si $d_F(G) = 2$, alors $\gamma(\bar{G}^*) = 2$.

Ainsi, le premier cas où la comparaison de $d_F(G)$ avec $\gamma(\bar{G}^*)$ n'est pas trivial est donc le cas où $\gamma(\bar{G}^*) = 2$. Le paragraphe suivant a pour objet la résolution de ce problème.

2 - CARACTERISATION DES GRAPHES DE DIMENSION FERRERS EGALE A 2

Soit $G = (X, U)$ un graphe tel que G^* soit biparti (i.e. tel que $\gamma(G^*) = 2$). Les arcs de G qui ne sont pas F -incompatibles avec aucun autre arc de G , c'est-à-dire les sommets isolés de G^* , sont appelés les arcs F -parfaits de G . On note $P(G)$ leur ensemble (on conservera cette définition y compris lorsque $\gamma(G^*) \neq 2$).

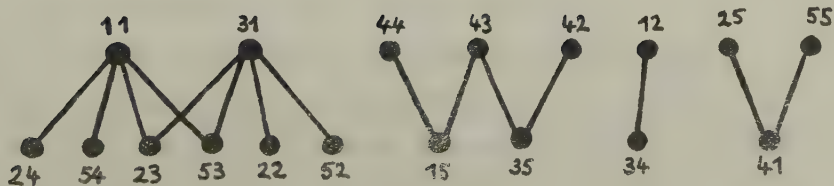
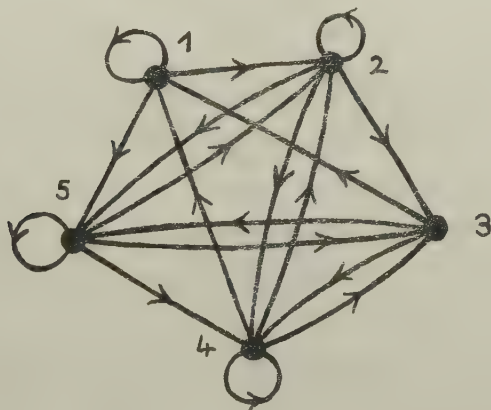
Considérons maintenant une composante connexe non triviale de G^* . Comme G^* est biparti, l'ensemble des sommets de cette composante se bipartitionne en deux sous-ensembles A_1 et A_2 , de sorte que les arcs de G appartenant à A_1 (resp. A_2) ne soient F -incompatibles qu'avec des arcs de G appartenant à A_2 (resp. A_1), et toujours avec un au moins. On dit alors que A_1 et A_2 sont des p -couleurs de G , et on les dit conjuguées l'une de l'autre.

En d'autres termes, les p -couleurs de G sont les classes d'équivalence modulo la relation R définie sur l'ensemble des arcs de G par: uRv SSI il existe une chaîne paire de G^* reliant u à v . Et deux p -couleurs sont conjuguées l'une de l'autre SSI les arcs de G appartenant à l'une sont reliés aux arcs de G appartenant à l'autre par des chaînes impaires de G^* . Par la suite, si A est une p -couleur de G , on notera A' sa conjugquée.

En fait, la considération de $P(G)$ et des p -couleurs de G est très naturelle si l'on veut recouvrir G au moyen de deux graphes de Ferrers: un tel recouvrement induit nécessairement une bicoloration de $G^* - P(G)$, et il est clair qu'une p -couleur doit être monochromatique, deux p -couleurs conjuguées ayant des couleurs différentes.

Soient par exemple G et G^* les graphes de l'exemple ci-dessous.

$G = (X, U)$

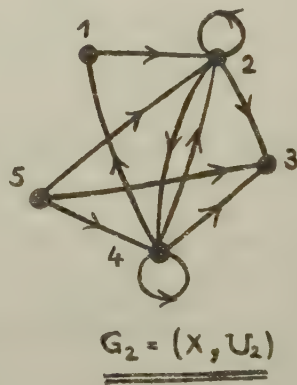
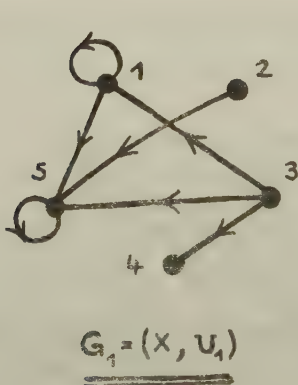


G^*

On a $P(G) = \emptyset$, et les p-couleurs sont :

$$\begin{array}{llll} A = \{11, 31\} & B = \{44, 43, 42\} & C = \{12\} & D = \{25, 55\} \\ A' = \{24, 54, 23, 53, 22, 52\} & B' = \{15, 35\} & C' = \{34\} & D' = \{41\} \end{array}$$

On constate qu'on a $G = G_1 \cup G_2$ où G_1 et G_2 sont les graphes de Ferrers de la figure ci-dessous,



et que $\{U_1, U_2\}$ est bien une bicoloration de G^* .

Mais réciproquement, toute bicoloration de G^* ne correspond pas nécessairement à un recouvrement de G par deux graphes de Ferrers.

Pour les graphes G et G^* de l'exemple traité,
 $\{V_1, V_2\}$, avec $V_1 = A \cup B \cup C \cup D$ et $V_2 = A' \cup B' \cup C' \cup D'$, est
 bien une bicoloration de G^* , à laquelle on associe $H_1 = (X, V_1)$
 et $H_2 = (X, V_2)$, et on a $G = H_1 \cup H_2$.

Mais H_1 et H_2 ne sont pas des graphes de Ferrers
 (par exemple, $11 \overset{H_1}{*} 44$), et ni V_1 ni V_2 ne sont F-extensibles
 dans G (par exemple, si $V_1 \subset V'_1 \subset U$, avec $H'_1 = (X, V'_1)$ graphe de
 Ferrers, alors $41 \in V'_1$, sinon $11 \overset{H'_1}{*} 44$, mais alors nécessairement
 $41 \overset{H'_1}{*} 25$).

Nous allons maintenant énoncer des propriétés de G
 lorsque $\gamma(G^*) = 2$, et ces propriétés nous permettront de
 montrer que G^* admet toujours une bicoloration satisfaisante,
 c'est-à-dire une bicoloration correspondant à un recouvrement
 de G par deux graphes de Ferrers.

Si $x, y, z, t \in X$, on dit que le quadruplet $xyzt$ est un N
 lorsque $xy, zt, zy \in U$ et $xt \notin U$. On dit qu'un N $xyzt$ est un
 N distingué lorsque, A étant une p-couleur de G , on a $zy \in A$ et
 $xy, zt \notin A$. Enfin, un N distingué $xyzt$ est un N parfait lorsque
 A, B et C étant les p-couleurs respectives de zy, xy et zt (donc
 telles que $A \neq B, C$), B et C ne sont pas conjuguées (i.e. $B \neq C'$).

LEMME DU N : soit $xyzt$ un N distingué de G , avec $zy \in A$; alors:

- (i) $xy, zt \notin P(G)$
soient respectivement B et C les p -couleurs de xy et zt
- (ii) pour tout $z_1 y_1 \in A$, on a $xy_1 \in B$ et $z_1 t \in C$
pour tout $z_2 y_2 \in A'$, on a $xy_2 \in C'$ et $z_2 t \in B'$
- (iii) pour tous $xb, at \in U$, on a $xb, at \notin A \cup A'$;
en particulier, $xy, zt \notin A'$ (i.e. $B, C \neq A'$)
si, de plus, $xyzt$ est un N parfait (i.e. $B \neq C'$),
alors:
- (iv) pour tous $z_1 y_1 \in A$ et $ay_1, z_1 b \in U$, on a
 $ay_1 \notin C \cup C'$ et $z_1 b \notin B \cup B'$
pour tous $z_2 y_2 \in A'$ et $cy_2, z_2 d \in U$, on a
 $cy_2 \notin B \cup B'$ et $z_2 d \notin C \cup C'$
- (v) pour tout N $abcd$ tel que $ab \in B$ et $cb \in A$,
on a $cd \in C$

démonstration:

- (i) il existe $z'y' \in A'$ tel que $zy * z'y'$; alors $xy' \in U$, sinon
 $z'y' * xy$, soit $xy \in A$; on en conclut que $zt * xy'$ et que
donc $zt \notin P(G)$;
de même, $z't \in U$, sinon $z'y' * zt$, soit $zt \in A$; on en conclut
que $xy * z't$ et que donc $xy \notin P(G)$;
- (ii) nous venons de montrer, par conséquent, que $xy' \in C'$ et
que $z't \in B'$; en particulier, le N $xy'z't$ ($xy' \in C'$, $z't \in B'$,
 $z'y' \in A'$ et $xt \notin U$) est un N distingué; ainsi, en supposant
que $z''y'' \in A$ avec $z''y'' * z'y'$, on démontrerait de même que
 $xy''z''t$ est un N distingué avec $xy'' \in (B')' = B$ et
 $z''t \in (C')' = C$;

en considérant que deux arcs de G appartiennent à une même p -couleur (resp. à deux p -couleurs conjuguées) SSI ils sont reliés dans G^* par une chaîne paire (resp. impaire), il devient clair que le raisonnement ci-dessus permet une démonstration par induction du point (ii);

- (iii) supposons que $xb \in A$; en lui appliquant le résultat du point (ii), on obtient $xt \in C$, ce qui est impossible; le reste du point (iii) se démontre de même;
- (iv) soient $z_1y_1 \in A$ et $z_2y_2 \in A'$, et supposons de plus que $z_1y_1 * z_2y_2$; soient également $ay_1, z_1b, cy_2, z_2d \in U$; en appliquant le point (ii) avec le N $xyzt$ et $z_1y_1 \in A$ d'une part, on obtient $xy_1 \in B$ et $z_1t \in C$, et avec $z_2y_2 \in A'$ d'autre part, on obtient $xy_2 \in C'$ et $z_2t \in B'$; en appliquant maintenant le point (iii) avec le N distingué $z_1y_1xy_2$ ($z_1y_1 \in A$, $xy_2 \in C'$, $xy_1 \in B \neq A, C'$, $z_1y_2 \notin U$), on obtient $cy_2, z_1b \notin B \cup B'$, tandis qu'en l'appliquant avec le N distingué $z_2tz_1y_1$ ($z_2t \in B'$, $z_1y_1 \in A$, $z_1t \in C \neq B', A$, $z_2y_1 \notin U$), on obtient $ay_1, z_2d \notin C \cup C'$; si, par contre, z_1y_1 et z_2y_2 ne sont pas F -incompatibles, alors il existe $z'_2y'_2 \in A'$ tel que $z_1y_1 * z'_2y'_2$ et $z''_1y''_1 \in A$ tel que $z''_1y''_1 * z_2y_2$, et un raisonnement analogue au raisonnement ci-dessus permet de conclure;
- (v) soit $z'y' \in A'$ tel que $zy * z'y'$; en lui appliquant le point (ii) avec le N distingué $xyzt$, on obtient $xy' \in C'$; en appliquant le point (ii) avec $ab \in B$ et le N distingué $zyxy'$ ($zy \in A$, $xy' \in C'$, $xy \in B \neq A, C'$, $zy' \notin U$), on obtient $ay' \in C'$;

supposons que $cd \in A$; en lui appliquant le point (ii) avec le N distingué $xyzt$, on obtient $xd \in B$, et en l'appliquant à ce dernier avec le N distingué $zyxy'$, on obtient $zd \in A$; or $zd \notin ay'$, $zd \in A$ et $ay' \in C'$; donc $A = C$, ce qui contredit le fait que $xyzt$ est un N distingué; donc $cd \notin A$; alors le N $abcd$ est un N distingué, et, d'après le point (i), $cd \notin P(G)$; soit D la p-couleur de cd ; en appliquant le point (ii) avec $abcd$ et $zy \in A$, on obtient $zd \in D$; or $zd \notin ay'$, $zd \in D$ et $ay' \in C'$; donc $D = C$ et $cd \in C$.

LEMME 1 : soit A une p-couleur de G et soient $xy, zt \in A$; alors:

- (i) $\{xt, zy\} \cap (P(G) \cup A) \neq \emptyset$
- (ii) si $xt, zy \in U$, alors $\{xt, zy\} \cap A \neq \emptyset$

démonstration:

si $x = z$ ou $y = t$, le lemme est trivial; on suppose donc $x \neq z$ et $y \neq t$;

i)- on suppose par exemple que $xt \notin U$; alors $zy \in U$, sinon

$xy \notin zt$;

si $zy \in P(G)$, le lemme est démontré;

supposons donc que $zy \notin P(G)$; alors il existe $z'y' \in U$ tel que $zy \notin z'y'$;

si $xy' \notin U$, alors $xy \notin z'y' \notin zy$, donc $zy \in A$ et le lemme est démontré;

supposons donc que $xy' \in U$; alors $xy' \not\in zt$ et $xy' \in A'$; or le N $zyxy'$ ($zy \in U$, $xy' \in A'$, $xy \in A$ et $zy' \notin U$) ne peut pas être distingué à cause du lemme du N (iii), car $xy' \in A'$ et $xy \in A$; donc $zy \in A$ et le lemme est démontré; on le démontrerait de même si $zy \notin U$;

2)- on suppose maintenant $xt, zy \in U$;

a)- si $xt \in P(G)$, le point (i) du lemme est démontré; supposons donc que $xt \notin P(G)$; alors il existe $x't' \in U$ tel que $xt \not\in x't'$; si $zt' \notin U$, alors $xt \not\in x't' \not\in zt$, donc $xt \in A$ et le point (i) du lemme est démontré; supposons donc que $zt' \in U$; alors le N $xtzt'$ ($xt \in U$, $zt' \in U$, $zt \in A$ et $xt' \notin U$) ne peut pas être distingué sinon, par le lemme du N (iii), on conclut que $xy \notin A$; si $xt \in A$, le point (i) du lemme est démontré; supposons donc que $xt \notin A$; comme le N $xtzt'$ n'est pas distingué, on a $zt' \in A$; on peut alors appliquer le résultat du 1) à $xy, zt' \in A$ et $xt' \notin U$ et conclure que $zy \in P(G) \cup A$, ce qui achève de démontrer le point (i) du lemme;

b)- supposons que $xt \in P(G)$; soient $x'y', z't' \in A'$ tels que $xy \not\in x'y'$ et $zt \not\in z't'$; alors $z'y' \notin U$, sinon $xt \not\in z'y'$; comme $x'y', z't' \in A'$ et $z'y' \notin U$, en appliquant le point (i) du lemme on obtient $x't' \in P(G) \cup A'$; or $x't' \not\in zy$, donc $x't' \in A'$ et $zy \in A$, et on achève la démonstration sans difficulté.

Soit A une p -couleur de G ; pour simplifier, on note $G-A$ le graphe $(X, U-A)$. Si $xy, zt \in U-A$, on dit que A sépare xy et zt lorsque xy et zt ne sont pas F -incompatibles dans G mais le sont dans $G-A$.

REMARQUE : en conséquence du lemme 1, si A sépare xy et zt , soit $xt \in A$ et $zy \notin U$, soit $xt \notin U$ et $zy \in A$

LEMME 2 : soient A, B et C trois p -couleurs de G telles que $A \neq B, C$ et $B \neq C'$; soient $xy \in B$ et $zt \in C$ tels que A sépare xy et zt ;
si A sépare $ab \in B$ et $cd \in U$, alors $cd \in C$

démonstration:

supposons par exemple, en vertu de la remarque ci-dessus, que $xt \notin U$ et $zy \in A$; alors $xyzt$ est un N parfait ($xy \in B$, $zt \in C$, $zy \in A \neq B, C$ et $xt \notin U$);
si $ad \in A$, en appliquant le lemme du N (iv), on obtient $ab \notin B \cup B'$, ce qui est impossible;
donc $ad \notin A$ et, compte tenu de la remarque, $ad \notin U$ et $cb \in A$; en appliquant maintenant le lemme du N (v) au N $abcd$, on conclut que $cd \in C$.

PROPRIETE 1 : soit G un graphe tel que $\gamma(G) = 2$ et soient
 A et A' deux p -couleurs conjuguées de G ;
 alors $P(G - A) = P(G) \cup A'$

démonstration:

- 1)- il est clair que $P(G - A) \subseteq P(G) \cup A'$;
- 2)- soit $xy \in P(G)$ et supposons qu'il existe $x'y' \in U - A$ tel que
 $xy \overset{G-A}{\nrightarrow} x'y'$; comme xy ne peut être F -incompatible avec $x'y'$
 dans G , on a par exemple $x'y \in A$;
 si le quadruplet $xyx'y'$ ($xy \in P(G)$, $x'y' \in U - A$ et $x'y \in A$) est
 un $N_{\overset{de G}{\curvearrowright}}$, c'est un N distingué, ce qui est impossible à cause du
 lemme du N (i);
 donc $xy' \in U$; comme $xy \overset{G-A}{\nrightarrow} x'y'$, on a $xy' \in A$; mais alors
 $xy', x'y \in A$ et $xy, x'y' \in U - A$, ce qui est en contradiction
 avec le lemme 1; donc $xy \in P(G - A)$;
- 3)- soit $xy \in A'$ et supposons qu'il existe $x'y' \in U - A$ tel que
 $xy \overset{G-A}{\nrightarrow} x'y'$; comme xy ne peut être F -incompatible avec $x'y'$
 dans G , on a par exemple $x'y \in A$;
 si le quadruplet $xyx'y'$ ($xy \in A'$, $x'y' \in U - A$ et $x'y \in A$) est
 un $N_{\overset{de G}{\curvearrowright}}$, c'est un N distingué, ce qui est impossible à cause
 du lemme du N (iii);
 donc $xy' \in U$ et, de même qu'au 2), $xy' \in A$, ce qui mène encore
 à une contradiction;
 donc $xy \in P(G - A)$.

PROPRIETE 2 : soit G un graphe tel que $\chi(G^*) = 2$ et soit A
une p -couleur de G ;
alors $\chi((G-A)^*) \leq 2$

démonstration :

posons $G-A = H$;

on va montrer que H^* n'a pas de cycle impair;

soit $\mu = [u_1, u_2, \dots, u_p, u_{p+1} = u_1]$ un cycle de H^* (autrement dit,
 $u_i \overset{H}{*} u_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq p$, c'est-à-dire que soit A sépare u_i et u_{i+1} ,
soit $u_i \overset{G}{*} u_{i+1}$);

1)- si deux arcs u_i et u_{i+1} de μ appartiennent à deux p -couleurs
conjuguées de G , il existe une chaîne impaire de G^* reliant
 u_i et u_{i+1} , et cette chaîne est également une chaîne de H^* ;
on peut donc déduire de μ un cycle $\mu_1 = [v_1, v_2, \dots, v_q, v_{q+1} = v_1]$
de H^* tel que p et q soient de même parité et satisfaisant:

(1) pour tout $i \in [1, q]$, si v_i et v_{i+1} appartiennent à
des p -couleurs conjuguées de G , alors $v_i \overset{G}{*} v_{i+1}$;

2)- si v, v', v'', v''' sont quatre arcs de G tels que A sépare
 v et v' d'une part, et v'' et v''' d'autre part, tels que
 v' et v'' soient reliés par une chaîne paire de G^* (chaîne
éventuellement nulle, auquel cas $v' = v''$) et tels que v et v'
n'appartiennent pas à deux couleurs conjuguées de G , alors
 v'' appartient à la même p -couleur de G que v' et, d'après le
lemme 2, v''' appartient à la même p -couleur de G que v ; il

existe donc une chaîne paire de G^* reliant v et v''' , et cette chaîne est également une chaîne de H^* ;

on peut donc déduire de μ_1 un cycle $\mu_2 = [w_1, \dots, w_r, w_{r+1} = w_1]$ de H^* tel que r soit de même parité que q , satisfaisant (1) et satisfaisant également:

(2) pour toute renumérotation des w_i en w'_j de sorte que

μ_2 s'écrive $\mu_2 = [w'_1, w'_2, \dots, w'_r, w'_{r+1} = w'_1]$, s'il existe $h, k \in [1, r]$ tels que A sépare w'_h et w'_{h+1} d'une part, et w'_k et w'_{k+1} d'autre part, alors h et k sont de même parité;

3)- nous allons montrer que μ_2 est pair, ce qui achèvera la démonstration puisque μ est de même parité que μ_2 ;
si μ_2 est un cycle de G^* , alors μ_2 est pair; sinon, soit I l'ensemble des indices $i \in [1, r]$ tels que A sépare w_i et w_{i+1} ; il est clair que $|I| \neq 1$ (sinon il existe une chaîne $[w_{i+1}, \dots, w_i]$ dans G^* , donc w_i et w_{i+1} appartiennent à la même p -couleur ou à deux p -couleurs conjuguées de G tout en étant séparées par A , ce qui est contradictoire soit avec le lemme 1, soit avec le fait que μ_2 satisfait (1));
on a donc $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, avec $k \geq 1$; alors, comme μ_2 satisfait (2), r est pair ($i_1, i_2, \dots, i_k$ et $r+i_1$ ont même parité).



On dit que deux graphes G_1 et G_2 sont p -équivalents lorsque $\chi(G_1^*) = \chi(G_2^*) = 2$ et sont tels que si A et A' sont deux p -couleurs conjuguées de l'un des graphes, A et A' sont également deux p -couleurs conjuguées de l'autre.

PROPRIÉTÉ 3 : soient G_1 et G_2 deux graphes p-équivalents et
soit A une de leurs p-couleurs;
alors: $G_1 - A$ et $G_2 - A'$ sont soit tous deux des
graphes de Ferrers, soit deux graphes p-équivalents

démonstration:

soient $G_1 = (X, U_1)$ et $G_2 = (X, U_2)$; posons $H_1 = G_1 - A$ et $H_2 = G_2 - A'$;
d'après la propriété 2, on a $\gamma(H_1^*), \gamma(H_2^*) \leq 2$ et on déduit de
la propriété 1 que $\gamma(H_1^*) = 1$ SSI $\gamma(H_2^*) = 1$; on a donc également
 $\gamma(H_1^*) = 2$ SSI $\gamma(H_2^*) = 2$;

supposons maintenant que H_1 et H_2 ne soient pas des graphes de
Ferrers et soient u et v deux arcs F-incompatibles de H_1 , de
p-couleurs respectives B et C dans G_1 et G_2 (donc $B, C \neq A, A'$);
si B et C sont conjuguées dans G_1 et G_2 , alors il existe une
chaîne impaire $[u, \dots, v]$ dans G_2^* , qui est également une chaîne
dans H_2^* ;

nous allons montrer que si B et C ne sont pas conjuguées, il
existe également une chaîne impaire $[u, \dots, v]$ dans H_2^* ;

soit donc $B \neq C'$, c'est-à-dire que A sépare u et v dans G_1 ;

posons $u = xy$ et $v = zt$, et supposons par exemple que $zy \in A$ et
 $xt \notin U_1$; ^(cf. rem. p. III-16) soit $z'y' \in A'$ tel que $z'y' \xrightarrow{G_2} zy$; en lui appliquant le
lemme du N (ii) avec le N distingué $xyzt$ ($xy \in B$, $zt \in C$,

$zy \in A \neq B, C$ et $xt \notin U_1$), on obtient $xy' \in C'$;

soit maintenant $x''y'' \in B'$ tel que $x''y'' \xrightarrow{G_2} xy$; en lui appliquant

le lemme du N (ii) avec le N distingué $zyxy'$ ($zy \in A$, $xy' \in C'$, $xy \in B \neq A, C'$ et $zy' \notin U_2$), on obtient $x''y' \in A'$; alors $x''y'' \stackrel{H_2}{*} xy'$; posons $u' = x''y''$ et $v' = xy'$; comme $u \in B$, $u' \in B'$, $v' \in C'$ et $v \in C$, et que $u' \stackrel{H_2}{*} v'$, il existe bien une chaîne impaire $[u, \dots, v]$ dans H_2^* ; ainsi, de toute chaîne μ_1 dans H_1^* on peut déduire une chaîne μ_2 dans H_2^* , et de même parité que μ_1 ; on termine sans difficulté la démonstration en se rappelant que deux arcs d'un graphe G appartiennent à une même p -couleur de G (resp. à deux p -couleurs conjuguées de G) SSI ils sont reliés dans G^* par une chaîne paire (resp. impaire).



Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant :

THEOREME : pour tout graphe G , $d_F(G) = 2 \iff \gamma((\bar{G})^*) = 2$

démonstration:

il résulte du théorème page III - 3 qu'il suffit de démontrer que si G est un graphe tel que $\gamma(G^*) = 2$, alors on peut le recouvrir au moyen de deux graphes de Ferrers :

soit $(G_i)_{0 \leq i \leq s}$ une suite telle que:

$$(i) \quad G_0 = G$$

(ii) pour tout i tel que $0 \leq i \leq s$, $\gamma(G_i^*) = 2$ et il existe une p -couleur A_i de G_i telle que $G_{i+1} = G_i - A_i$

(iii) G_s est un graphe de Ferrers

compte tenu des propriétés 1 et propriété 2, il est clair qu'une telle suite existe;

pour tout i tel que $0 \leq i \leq s$, soit A_i' la p -couleur conjuguée de A_i dans G_i et soit la suite $(G_i')_{0 \leq i \leq s}$ définie par:

$$(iv) \quad G_0' = G$$

(v) pour tout i tel que $0 \leq i \leq s$, $G_{i+1}' = G_i' - A_i'$

compte tenu de la propriété 3, il est clair que G_i et G_i' sont p -équivalents pour $0 \leq i \leq s$ et que G_s' est un graphe de Ferrers; il nous reste à montrer que $G = G_s \cup G_s'$; or soit u un arc de G n'appartenant pas à G_s ; alors il existe un indice i , $0 \leq i \leq s$, tel que $u \in A_i$ et, d'après la propriété 1, on a $u \in P(G_{i+1}') \subseteq P(G_s')$.

On a alors comme conclusion immédiate des théorèmes pages III-3 et III-21 :

COROLLAIRE : $d_F(G) = 3 \Rightarrow \gamma((\bar{G})^*) = 3$

REMARQUE :

déterminer si un graphe simple H est bichromatique peut évidemment s'effectuer au moyen d'un algorithme polynômial; il s'ensuit que le théorème ci-dessus permettrait d'écrire un algorithme polynômial capable de décider si un graphe G donné est de dimension Ferrers égale à 2; la démonstration du théorème étant constructive, le même algorithme pourrait également calculer deux graphes de Ferrers G_1 et G_2 tels que $\bar{G} = G_1 \cup G_2$.

3 - PROBLEMES RELATIFS AUX GRAPHS DE F-INCOMPATIBILITE ET A

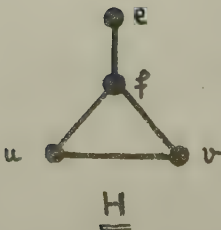
L'INEGALITE $d_F(G) \geq \chi(\bar{G}^*)$

(A)

Lorsqu'on cherche à déterminer "à la main" la dimension Ferrers d'un graphe G , l'utilisation d'une coloration minimum de $(\bar{G})^*$ se révèle le plus souvent fructueuse.

Par contre, il en va tout autrement, d'un point de vue algorithmique général, puisque qu'on sait que la recherche du nombre chromatique d'un graphe est un problème NP-difficile au sens de [KAR] (voir par exemple également [HOR-SAH]).

Toutefois, tous les graphes simples ne sont pas des graphes de F-incompatibilité, c'est-à-dire qu'étant donné un graphe simple H , il n'est pas certain qu'il existe un graphe G dont H soit le graphe des F-incompatibilités, même si on s'autorise à leur ajouter des sommets isolés.



Soit, par exemple, H le graphe simple de la figure ci-contre, et soit $G = (X, U)$ un graphe tel que G^* , éventuellement privé de ses sommets isolés, soit égal à H .

posons $u = ab$, $v = cd$, $e = xy$, $f = zt$, avec
 $a, b, c, d, x, y, z, t \in X$;

u, f et v étant deux à deux F-incompatibles dans G ,
 a, c et z sont tous trois différents, et b, d et t sont
également tous trois différents;

comme e et u ne sont pas F-incompatibles, on a :

- soit $xb \in U$

mais alors $zt * xb$ (car $zt * ab$ et $zt * xy$); donc xb
n'est pas un sommet isolé de G^* , et c'est par conséquent
un sommet de H ;

comme $b \neq d, t$, on a $xb \in \{ab, xy\}$, et donc $a = x$ ou $b = y$;

- soit $ay \in U$

mais alors $ay * zt$ (car $zt * ab$ et $zt * xy$); donc ay ,
qui n'est pas un sommet isolé de G^* , est un sommet de H ;
comme $a \neq c, z$, on a $ay \in \{ab, xy\}$, et donc $a = x$ ou $b = y$;

comme e n'est pas non plus F-incompatible avec v , on
montrerait par un raisonnement analogue que $c = x$ ou $d = y$;

comme $a \neq c$ et $b \neq d$, il est clair qu'on a ($a = x$ et $d = y$)
ou ($c = x$ et $b = y$); c'est -à-dire $ad = xy \in U$ ou $cb = xy \in U$,
ce qui contredit $ab * cd$.

il n'existe donc aucun graphe G tel que G^* et H ne
diffèrent que par des sommets isolés, autrement dit, H n'est
pas un graphe de F-incompatibilité.

On peut donc se poser les deux problèmes suivants :

PROBLEME 1

Caractériser les graphes simples qui sont, aux sommets isolés près, des graphes de F-incompatibilité.

PROBLEME 2

Déterminer si le problème de la recherche du nombre chromatique des graphes de F-incompatibilité est encore un problème NP-difficile.

(B)

Le théorème page III - 3 ne donne $\chi((\bar{G})^*)$ que comme un minorant de $d_F(G)$. S'il est évident que ces deux entiers sont simultanément égaux à 1, et si le théorème page III - 21 montre qu'ils sont simultanément égaux à 2, nous ne savons rien des autres cas sinon que nous ne connaissons pas de graphe G tel que $\chi((\bar{G})^*)$ et $d_F(G)$ soient différents.

Nous posons alors le problème suivant :

PROBLEME 3

Existe-t-il des graphes G tels que $\chi((\bar{G})^*) \neq d_F(G)$?

4 - UNE CONDITION SUFFISANTE DE F-EXTENSIBILITE

Remarquons tout d'abord que les conditions (2) et (2bis) du théorème page II - 2 permettent d'exprimer la dimension Ferrers d'un graphe de la façon suivante :

PROPRIETE 1

Pour tout graphe $G = (X, U)$, $d_F(G)$ est le cardinal minimum d'un recouvrement de $\bar{U}$ (resp. de U^d) par des ensembles F-extensibles dans $\bar{G}$ (resp. dans G^d).

Cette reformulation, jointe à la propriété 2 ci-dessous, nous sera plus particulièrement utile aux chapitres IV, ^{et V} pour l'étude de la dimension Ferrers des graphes transitifs et surtout des ordres.

Si $H = (Y, V)$ est un graphe quelconque, et si $G = (X, U)$ est un sous-graphe partiel de H , appelons F-parfait dans H avec G tout arc $v \in V - U$ qui ne soit F-incompatible dans H avec aucun arc de G .

On a alors le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 2

Soit $G = (X, U)$ un graphe de Ferrers inclus dans un graphe H , et soit v un arc F -parfait dans H avec G . Alors $U \cup \{v\}$ est F -extensible dans H .

démonstration :

posons $v = xy$ et soit $\mathcal{Z}$ un ordre total sur X compatible à gauche avec G (cf. cond. (7), thm 2, p. I - 18) ; posons $H = (Y, V)$;

- si pour tout $a \in X$, $ax \in \mathcal{Z} \Rightarrow ay \in V$:
on pose $G' = (X, U')$, avec $U' = U \cup \{ay ; ax \in \mathcal{Z}\}$;
soient $zt \in \mathcal{Z}$ et $tt' \in U'$; si $tt' \in U$, alors $zt' \in U \subseteq U'$;
si $tt' \notin U$, alors $tt' = ty$ avec $tx \in \mathcal{Z}$, donc $zx \in \mathcal{Z}$, donc $zy = zt' \in U'$;

alors $\mathcal{Z}$ est également un ordre total sur X compatible à gauche avec G' , qui est donc bien un graphe de Ferrers, avec $v \in U'$ et $G \subset G' \subseteq H$;

- s'il existe $a \in X$ tel que $ax \in \mathcal{Z}$ et $ay \notin V$:
supposons que a soit minimum, relativement à $\mathcal{Z}$, avec ces propriétés (donc $a \neq x$) ;

posons $U' = U \cup \{xy\} \cup U_x \cup U_y$
avec $U_x = \{xb ; ab \in U\}$
 $U_y = \{cy ; c \neq a, ca \in \mathcal{Z}\}$;

soit τ' l'ordre total sur X déduit de τ en "plaçant x juste devant a ", c'est-à-dire que a couvre x dans τ' et que τ et τ' ont même restriction sur $X - \{x\}$:

$$\tau = \dots\dots a \dots x \dots\dots$$

$$\tau' = \dots\dots xa \dots\dots\dots$$

alors τ' est un ordre total sur X compatible à gauche avec G' :

supposons que $zt \in \tau'$ et $ts \in U'$

● si $x \notin \{z, t\}$

alors $zt \in \tau$ et $ts \in U \cup U_y$

* si $ts \in U$, alors $zs \in U \subseteq U'$, car $\tau U \subseteq U$;

* si $ts \in U_y$, alors on a :

$ts = cy$ avec $c \neq a$ et $ca \in \tau$, donc $zt = zc \in \tau$, et

en particulier $za \in \tau$ avec $z \neq a$;

donc $zy = zs \in U_y \subseteq U'$;

● si $z = x$, i.e. $xt \in \tau'$ et $ts \in U'$

* si $t = x$ ou $s = y$, on a trivialement $xs \in U'$

* si $t \neq x$ et $s \neq y$, alors $at \in \tau$ et $ts \in U$, donc $as \in U$ et $xs \in U_x \subseteq U'$

● si $t = x$, avec $z \neq x$, i.e. $zx \in \tau'$ et $xs \in U'$, alors on a $za \in \tau$ avec $z \neq a$, donc $zx \in \tau$;

* si $xs \in U$, alors $zs \in U \subseteq U'$, car $\tau U \subseteq U$

* si $s = y$, alors $zs = zy \in U_y \subseteq U'$

* si $xs \in U_x$, alors $as \in U$ et $zs \in U \subseteq U'$, car $\tau U \subseteq U$

donc G' est un graphe de Ferrers avec $U \cup \{u\} \subseteq U'$;

d'autre part,

- $U \cup \{xy\} \subseteq V$ par définition
- $U_y \subseteq V$ par définition de a (propriété de minimalité; cet ensemble est éventuellement vide)
- $U_x \subseteq V$, sinon soit $ab \in U$ tel que $xb \notin V$: on a alors $xy \stackrel{H}{*} ab$ (car $ay \notin V$ par définition de a , donc $ay \notin U$), ce qui contredit le fait que u est F -parfait dans H avec G

donc $U' \subseteq U$;

$U \cup \{u\}$ est bien F -extensible dans H .



CHAPITRE IV

DIMENSION FERRERS DES GRAPHS TRANSITIFS ET DES
PSEUDO-ORDRES

1 - CARACTERISATIONS SPECIFIQUES DE LA DIMENSION FERRERS

DES GRAPHS TRANSITIFS

Si $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$, il est clair qu'on peut remplacer dans cette égalité n'importe quel G_i par G'_i , dès que $G \subseteq G'_i \subseteq G_i$.

Or le théorème 1 page I-44 déclare que tout graphe de Ferrers minimal contenant un graphe transitif est lui-même transitif. On déduit donc de la définition de la dimension Ferrers (cf. p. II-4):

THEOREME

Si G est transitif, $d_F(G)$ est le plus petit nombre de graphes de Ferrers transitifs dont G est l'intersection, et c'est également le plus petit nombre de graphes de Ferrers transitifs tel qu'il existe un plongement de G dans leur produit strict.

Ainsi, on peut exprimer la dimension Ferrers des graphes transitifs au moyen des seuls graphes de Ferrers transitifs.

De même, la propriété 1 page III-27 peut être précisée lorsque G est transitif.

Nous allons d'abord établir une propriété relative à l'ensemble des arcs F -parfaits (cf. p. III-8) du dual d'un graphe transitif.

Si $G = (X, U)$, appelons graphe d'incomparabilité associé à G le graphe $G^I = (X, U^I)$ où $U^I = \{xy \in X^2; x \neq y, xy, yx \notin U\}$.

On a alors $G^d = G_A \cup (\bar{G})_\Delta \cup G^I$. De plus :

PROPRIÉTÉ 1

Si $G = (X, U)$ est un graphe transitif, alors

$$U_A \cup (\bar{U})_\Delta \subseteq P(G^d)$$

démonstration :

soient $xy, zt \in U^d$ et supposons que $xy \stackrel{G^d}{*} zt$; alors $xt, zy \notin U^d$, c'est-à-dire que $tx, yz \in U$;

- si $xy \in (\bar{U})_\Delta$, on a $x = y$ et $tz \in U$ par transitivité;
 - si $xy \in U_A$, on a encore $tz \in U$ par transitivité;
- or $zt \in U^d$ contredit $tz \in U$.

Nous pouvons maintenant énoncer :

PROPRIETE 2

Si $G = (X, U)$ est un graphe transitif, alors $d_F(G)$ est le plus petit entier k tel que :

- (1) il existe un recouvrement de cardinal k de U^I par des ensembles F -extensibles dans G^d
- (2) il existe k graphes de Ferrers inclus dans G^d , contenant chacun $G_A \cup (\bar{G})_\Delta$ et dont la réunion couvre G^I

démonstration :

compte tenu de la définition de la dimension Ferrers (cf. cond. (2bis) thm p. II-2), la propriété se déduit aisément de l'équivalence des conditions (1) et (2) avec la condition (3) : il existe k graphes de Ferrers dont G^d est la réunion;

(1) $\Rightarrow$ (2) :

supposons que $\{U_1, \dots, U_k\}$ soit un recouvrement de U^I par des ensembles F -extensibles dans G^d ;

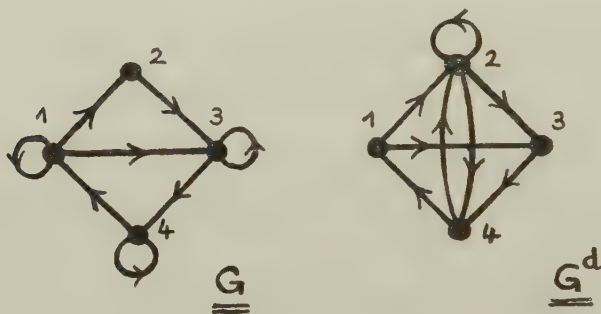
soient alors, pour tout $i \in [1, k]$, $H_i = (X, V_i) \subseteq G^d$ un graphe de Ferrers tel que $U_i \subseteq V_i$, et maximal pour ces propriétés;

compte tenu des propriétés 2 page III-28 et 1 ci-dessus, on a

$$U_A \cup (\bar{U})_\Delta \subseteq V_i;$$

(2) $\Rightarrow$ (3) et (3) $\Rightarrow$ (1) : trivial.

Par contre, l'exemple suivant montre que si G n'est pas transitif, il est en général insuffisant de recouvrir U^I (en conservant pour U^I la même définition que si G était transitif) par des ensembles F -extensibles dans G^d .



on a $(\bar{U})_{\Delta} = \{22\}$ et $U^I = \{24, 42\}$;

on constate que U^I est F -extensible dans G^d , puisque $(X, \{24, 42, 22\})$ est un graphe de Ferrers inclus dans G^d ;
 or $\{13, 34, 41\}$ induit une clique de $(G^d)^*$ et donc $d_F(G) \geq 3$ (cf. thm p. III - 3).

2 - RELATION ENTRE LA DIMENSION FERRERS DES GRAPHES TRANSITIFS ET CELLE DE LEURS FERMETURES REFLEXIVES

On constate qu'en général, en fermant un graphe par réflexivité, on ne peut prévoir a priori si la dimension Ferrers va augmenter ou diminuer :

- si G est le complémentaire de n boucles disjointes, on a $d_F(G) = n$ (cf. pté 3, p. II-17) alors que $d_F(G^r) = 1$;
- si G , G_1 et G_2 sont les graphes de la figure ci-dessous, on a $\bar{G} = G_1 \cup G_2$ d'une part, où G_1 et G_2 sont des graphes de Ferrers, et, d'autre part, on constate que $(1,3,2,1)$ est un 4-a-c-a de G ; on a donc $d_F(G) = 2$;



or G^r est le complémentaire d'un circuit élémentaire de longueur 4, et donc $d_F(G^r) = 4$ (cf. pté 3, p. II-17).

Le résultat montre qu'il en va autrement lorsque G est un graphe transitif.

PROPRIETE 1

Soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soit $G' = (X, U')$ un graphe tel que $U' - U \subseteq (U')_{\Delta}$. Alors

$$d_F(G) \leq d_F(G')$$

démonstration :

on a $U_A = (U')_A$, $U^I = (U')^I$ et donc

$$\begin{cases} U^d = U_A \cup (\bar{U})_\Delta \cup U^I \\ (U')^d = U_A \cup (\overline{(U')})_\Delta \cup U^I \end{cases}$$

avec $(\overline{(U')})_\Delta \subseteq (\bar{U})_\Delta$; en particulier, $(G')^d \subseteq G^d$;

or si $V \subseteq U^I$ est un ensemble F-extensible dans $(G')^d$, V est évidemment F-extensible dans G^d ;

la propriété 2 page IV - 3 permet de conclure.

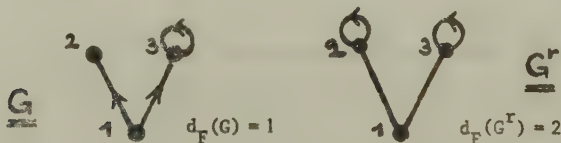


On a donc en particulier :

PROPRIETE 2

Si G est un graphe transitif, alors $d_F(G) \leq d_F(G^r)$.

L'exemple simple ci-dessous montre que l'égalité n'est pas toujours réalisée.



Une étude plus fine de cette inégalité permettrait de ramener l'étude de la dimension Ferrers des graphes transitifs à celle de la dimension Ferrers des préordres. Nous y reviendrons au paragraphe concernant la dimension Ferrers des pseudo-ordres (cf. p. IV - 30).

3 - FACTORISATION PARTICULIERE DE LA DIMENSION FERRERS DES

GRAPHES TRANSITIFS

Lorsque G est transitif, la propriété 2 page IV-3 invite à rechercher une factorisation de $d_F(G)$ utilisant les composantes connexes de G^I .

Le lemme suivant va nous permettre d'y parvenir (pour la notation $\mathfrak{J}(G_1, \dots, G_k)$, voir page II-20).

LEMME

Soit G un graphe transitif et soient $G^I[x_1], \dots, G^I[x_k]$ les composantes connexes de G^I non réduites à un sommet.

Alors il existe une permutation $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que :

$$\mathfrak{J}(G^d[x_{i_1}], G^d[x_{i_2}], \dots, G^d[x_{i_k}]) \subseteq G^d$$

démonstration :

• si $k=1$, le résultat est trivial

• si $x \in X_{i_1}$ et $y \in X_{i_j}$ avec $i \neq j$, alors $xy \notin U \Rightarrow yx \in U$

- $G^I[Y]$ est une composante connexe de G^I ssi $(G \cup G^I)[Y]$ est une composante fortement connexe de $G \cup G^I$ (cf. [LEC-MON]).
- les deux constatations ci-dessus permettent aisément de conclure.

Nous pouvons alors montrer :

PROPRIÉTÉ 1

Soit G un graphe transitif et soient $G^I[X_1], \dots, G^I[X_k]$ les composantes connexes de G^I . Alors

$$d_F(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{ d_F(G[X_i]) \}$$

démonstration :

soit $G = (X, U)$; si U^I est vide, le résultat est évident, car $d_F(G) = 1$ (cf. pté 2, p. IV-3) et $|X_i| = 1$ pour tout i ; on suppose donc U^I non vide ;

soient $G^I[X_1], \dots, G^I[X_k]$ les composantes connexes de G^I non réduites à un sommet et supposons, pour simplifier les notations, que $(1, 2, \dots, k)$ est la permutation dont le lemme assure l'existence ;

d'après la propriété page II-10, on a $d_F(G) \geq \max_{1 \leq i \leq k} \{ d_F(G[X_i]) \}$

supposons maintenant que pour tout i , $G_i = (X_i, U_i)$ soit un graphe de Ferrers avec $G_i \subseteq G^d[X_i]$; le lemme page II-21 permet de conclure que $H = \bigcup (G_1, \dots, G_k)$ est un graphe de Ferrers, tandis que le lemme ci-dessus permet de conclure que $H \subseteq G^d$;

soit $h = \max_{1 \leq i \leq k} \{d_F(G[X_i])\}$;

du fait que $(G[X_i])^d = G^d[X_i]$, et compte tenu de la définition de la dimension Ferrers, il existe pour tout i des graphes de Ferrers $G_i^1, \dots, G_i^h$, non nécessairement tous distincts, tels que $G^d[X_i] = \bigcup_{1 \leq j \leq h} G_i^j$;

il est alors clair que $\{H_1, \dots, H_k\}$, en posant pour tout j , $H_j = \bigcup (G_1^j, G_2^j, \dots, G_k^j)$, est un recouvrement de U^I par des graphes de Ferrers inclus dans G^d ;

la propriété 2 page IV-3 permet de conclure que $d_F(G) \leq h$.

La propriété ci-dessus permet donc de ramener l'étude de la dimension Ferrers des graphes transitifs à celle des graphes transitifs ayant un graphe d'incomparabilité connexe.

Etant donné que la propriété 4 page II-27 permet, pour tout graphe G , de factoriser $d_F(G)$ suivant les composantes B-c-connexes de G , on peut vouloir comparer cette factorisation avec celle de la propriété ci-dessus.

Montrons tout d'abord le lemme suivant, utilisant pour $B(G)$ les notations de la page II - 5 .

LEMME

Soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soit $xy \in U^I$.

Si $\sigma'(x)\sigma''(y)$ et $\sigma'(y)\sigma''(x)$ ne sont pas des arcs d'une même composante connexe de $B(\bar{G})$, alors x et y sont dans deux composantes connexes distinctes de G .

chacune d'entre elles étant un graphe complet symétrique.

démonstration :

soit donc $xy \in U^I$ et supposons que $zx \in U$; on a donc $yz \notin U$, sinon, par transitivité, on a $yx \in U$, ce qui contredit $xy \in U^I$;

si $xz \notin U$, on en conclut que $[\sigma''(x), \sigma'(y), \sigma''(z), \sigma'(x), \sigma''(y)]$ est une chaîne de $B(\bar{G})$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\sigma'(x)\sigma''(y)$ et $\sigma'(y)\sigma''(x)$;

un raisonnement analogue montrerait que $xz \in U \Rightarrow zx \in U$, et la transitivité de G permet d'en déduire aisément le lemme.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant :

PROPRIETE 2

Pour tout graphe G transitif n'admettant aucun sous-graphe complet symétrique comme composante connexe, tout sous-graphe $G[Y]$ induit par une composante connexe $G^I[Y]$ de G^I est un sous-graphe d'une composante B-c-connexe de G .

démonstration :

posons $G[Y] = (Y, V)$, $G = (X, U)$, et soient $x, y \in Y$;

alors il existe une chaîne $\mu = [x=a_0, a_1, \dots, a_p=y]$ de G^I , et le lemme ci-dessus permet de conclure que, pour $1 \leq i \leq p$, $\sigma'(a_i) \sigma''(a_{i-1})$ et $\sigma'(a_{i-1}) \sigma''(a_i)$ sont des arcs d'une même composante connexe de $B(\bar{G})$;

on en déduit donc que $\sigma'(x)$ et $\sigma''(y)$ appartiennent à une même composante connexe de $B(\bar{G})$, et soit $G' = (X', U')$ la composante B-c-connexe de G qui lui est associée;

on a alors $x, y \in X'$ et, de plus, si $xy \in V$ (i.e. $xy \in U$), alors $xy \in U'$.



La factorisation de la dimension Ferrers d'un graphe G suivant la dimension Ferrers de ses composantes connexes (cf. pté 1, p. II-20) permettant "d'écarter" au préalable les composantes connexes de G

qui sont des graphes complets symétriques, la propriété 2 ci-dessus montre que la factorisation de la dimension Ferrers d'un graphe G transitif suivant la dimension Ferrers de ses sous-graphes induits par les composantes connexes de son graphe d'incomparabilité (cf. pté 1 p. IV-8) est plus fine que celle suivant la dimension Ferrers de ses composantes B-c-connexes (cf. pté 4, p. II-27).

4 - UTILISATION DU NOMBRE DE STABILITE POUR MAJORER LA DIMENSION

FERRERS D'UN GRAPHE TRANSITIF

Soit $G = (X, U)$ un graphe et soit $Y \subseteq X$. On dit que Y est un stable pour G lorsque $G[Y]$ n'admet comme arc que des boucles.

Le nombre de stabilité de G , noté $\alpha(G)$, est alors le cardinal maximum d'un ensemble stable pour G .

Soit $\mu = [x_0, x_1, \dots, x_h]$ un chemin d'un graphe $G = (X, U)$. On note $\bar{G}^+[\mu]$ le sous-graphe partiel de $\bar{G}$ engendré par l'ensemble d'arcs $\bar{U}_\mu^+ = \{xy; x=x_i \text{ pour un } i \in [0, h], y \in X, xy \notin U\}$;

On définit de même $\bar{G}^-[\mu]$ en posant $\bar{U}_\mu^- = \{xy; x \in X, y=x_i \text{ pour un } i \in [0, h], xy \notin U\}$.

LEMME

Si G est un graphe transitif et si μ est un chemin de G , alors $\bar{G}^+[\mu]$ et $\bar{G}^-[\mu]$ sont des graphes de Ferrers.

démonstration :

soient $ab, cd \in \bar{U}_\mu^+$; alors a et c sont deux sommets du chemin μ et on a, par exemple, $ac \in U$;

si $cb \in U$, on a $ab \in U$, par transitivité, ce qui est impossible par définition de $\bar{U}_\mu^+$; donc $cb \in \bar{U}_\mu^+$ et, par conséquent, on ne peut pas avoir $ab \in \bar{G}^+[\mu] \setminus U$; $\bar{G}^+[\mu]$ est donc bien un graphe de Ferrers ;

un raisonnement analogue montrerait que $\bar{G}^-[\mu]$ est également un graphe de Ferrers.



Ce lemme, joint au résultat classique suivant démontré par R.P. Dilworth dans le cas des ordres, mais qu'on étend sans difficulté aux graphes transitifs :

THEOREME 1 [DIL]

Si G est un graphe transitif, $\alpha(G)$ est le plus petit nombre de chemins de G partitionnant l'ensemble des sommets de G .

mène au résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 1

Pour tout graphe G transitif, $d_F(G) \leq \alpha(G)$

démonstration :

soit $C = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ un ensemble de chemins de G partitionnant l'ensemble des sommets de G ;

il est clair que $\bar{G} = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \bar{G}^+[\mu_i] = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \bar{G}^-[\mu_i]$;

compte tenu du lemme ci-dessus, on en déduit que $d_F(G) \leq k$, et, si de plus C a été choisi de cardinal minimum, on a, d'après le théorème de Dilworth, $k = \alpha(G)$, ce qui achève la démonstration.



Cette propriété peut se révéler utile lorsque $\alpha(G)$ est "petit", mais elle est inefficace lorsque $\alpha(G)$ est "grand". La majoration de $d_F(G)$ que nous allons maintenant montrer va, dans une certaine mesure, tempérer cette inefficacité.

Soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soit S un stable maximal pour G .

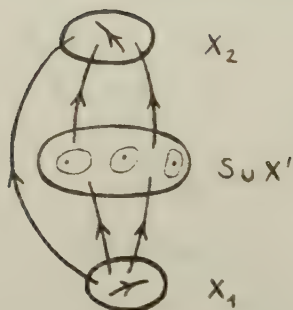
On note X/S la partition $\{X_1, X_2, X', S\}$ de X associée à S de la façon suivante :

- $X_1 = \{x \in X-S; \Gamma^-(x) \cap S = \emptyset\}$
- $X_2 = \{x \in X-S; \Gamma^+(x) \cap S = \emptyset\}$
- $X' = \{x \in X-S; \Gamma^-(x) \cap S \neq \emptyset, \Gamma^+(x) \cap S \neq \emptyset\}$

En remarquant, puisque S est un stable maximal pour G , que pour tout $x \in X-S$ on a $(\Gamma^+(x) \cup \Gamma^-(x)) \cap S \neq \emptyset$, on constate que X/S est bien une partition de X .

En utilisant de plus la transitivité de G , on constate aussi que :

- tout arc de G ayant son extrémité dans X_1 y a également son origine (soit $xy \in U$; si $x \in X_2 \cup X'$, alors $\Gamma^-(x) \cap S \neq \emptyset$; soit $s \in \Gamma^-(x) \cap S$; alors $sy \in U$)
- tout arc de G ayant son origine dans X_2 y a également son extrémité
- les composantes connexes de $G[X' \cup S]$ sont des sommets de S , bouclés ou non, ou des graphes complets symétriques ayant exactement un sommet s dans S et ses autres sommets dans X' , lesquels sont tous des sommets jumeaux de s relativement à G (si $x \in X'$, alors il existe $s, s' \in S$ tels que $sx, xs' \in U$; donc $ss' \in U$; donc $s = s'$)



Nous allons utiliser ce type de partition, illustrée par la figure ci-contre, pour majorer la dimension Ferrers d'un graphe transitif.

PROPRIÉTÉ 2

Soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soit S un ensemble stable maximal pour G . Soit X/S la partition $\{X_1, X_2, X', S\}$ associée à S , et supposons que $|X_1| + |X_2| \geq 2$.

Alors $d_F(G) \leq |X_1| + |X_2|$.

démonstration :

soit $\varphi : X \rightarrow S \cup X_1 \cup X_2$ l'application définie par :

- si $x \in S \cup X_1 \cup X_2$, alors $\varphi(x) = x$
- si $x \in X'$, alors $\varphi(x)$ est l'unique élément de S appartenant à la même composante connexe de $G[S \cup X']$ que x

compte tenu des propriétés de la partition $X \cap S$, φ est correctement définie en tant qu'application, et, de plus, c'est un plongement surjectif de G dans $G[S \cup X_1 \cup X_2] = G'$;

on déduit alors de la propriété page II-11 que $d_F(G) = d_F(G')$, c'est -à-dire qu'on peut supposer, sans perte de généralité, que X' est vide ;

① : supposons que $|X_1| = |X_2| = 1$

les sommets isolés, même bouclés, n'affectant pas la dimension Ferrers d'un graphe si celle-ci est supérieure ou égale à 2 (cf. pté 1, p. II-20), on peut supposer, sans perte de généralité, que G n'en possède pas ;

posons $X_1 = \{z\}$ et $X_2 = \{t\}$;

1^{er} cas : $zt \notin U$

alors z et t sont dans des composantes connexes différents de G ; la propriété 1, p. II-20 permet de conclure, étant donné que chaque composante connexe de G est alors de dimension Ferrers au plus égale à 2 ;

2^{ème} cas : $zt \in U$

posons :

$$S_1 = \{s \in S ; st \in U \text{ et } zs \notin U\}$$

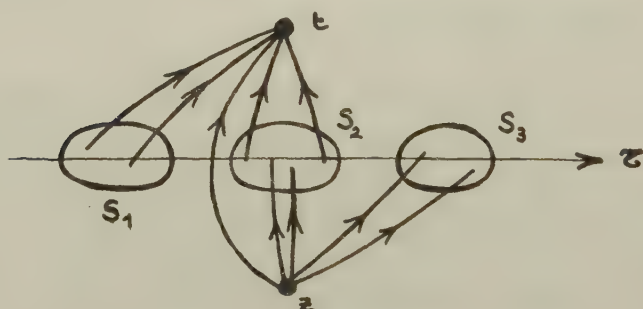
$$S_2 = \{s \in S ; st \notin U \text{ et } zs \in U\}$$

$$S_3 = \{s \in S ; st \notin U \text{ et } zs \notin U\}$$

comme G n'a pas de sommets isolés, $\{S_1, S_2, S_3\}$ est une partition de S ;

soit τ un ordre total sur S tel que les éléments de S_1 précèdent ceux de S_2 , qui précèdent ceux de S_3 (i.e. $s \in S_i$, $s' \in S_j$ et $i < j \Rightarrow ss' \in \tau$) ;

on peut représenter le graphe G par la figure ci-dessous :



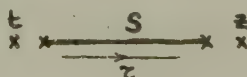
• posons $H_1 = (X, V_1)$ avec

$$V_1 = (\{t\} \times S) \cup (S \times \{z\}) \cup \{tz\} \cup (\tau \cap \bar{U}) \cup (\{tt, zz\} \cap \bar{U})$$

soit τ_1 un ordre total sur X tel que :

- t précède tout autre élément de X
- tout élément de X autre que z précède z
- la restriction de τ_1 à S est égale à τ

on peut schématiser τ_1 de la façon suivante :



on vérifie aisément que τ_1 est un ordre total sur X compatible à gauche avec H_1 , qui est donc un graphe de Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. I - 18) ;

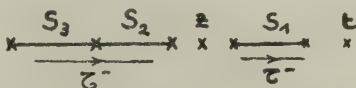
• posons $H_2 = (X, V_2)$ avec

$$V_2 = (\tau^- \cap \bar{U}) \cup (\{z\} \times S_1) \cup (S_3 \times \{t\})$$

soit τ_2 un ordre total sur X tel que :

- z précède tout élément de S_1
- tout élément de $S_3 \cup S_2$ précède z
- t est le plus grand élément
- la restriction de τ_2 à S est égale à τ^-

on peut schématiser τ_2 de la façon suivante :



on vérifie aisément que τ_2 est un ordre total sur X compatible à gauche avec H_2 , qui est donc un graphe de Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. I - 18) ;

• on vérifie aisément que $\bar{G} = H_1 \cup H_2$, d'où on déduit que

$$d_F(G) \leq 2 = |X_1| + |X_2| ;$$

② : supposons que $|X_1| + |X_2| > 2$

comme $d_F(G) = d_F(G^-)$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $|X_2| > 2$;

1^{er} cas : il existe $z, t \in X_2$, avec $z \neq t$, tels que $zt \in U$

posons :

$$S_1 = \{s \in S; sz \in U \text{ et } st \in U\}$$

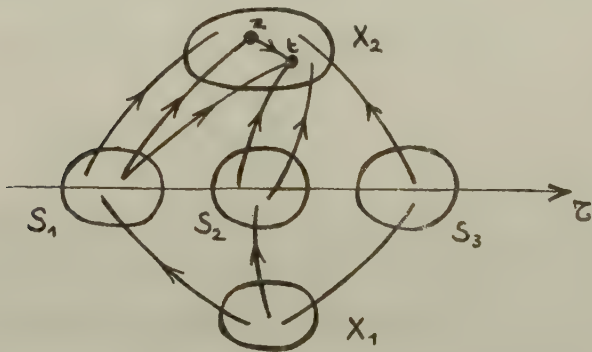
$$S_2 = \{s \in S; sz \notin U \text{ et } st \in U\}$$

$$S_3 = \{s \in S; sz \notin U \text{ et } st \notin U\}$$

comme $zt \in U$, $\{S_1, S_2, S_3\}$ est une partition de S ;

soit $\mathcal{Z}$ un ordre total sur S tel que les éléments de S_1 précèdent ceux de S_2 , et que ceux-ci précèdent ceux de S_3 ;

on peut représenter le graphe G par la figure ci-dessous :



• posons $H_1 = (X, V_1)$ avec

$$V_1 = ((X_2 \times \{z, t\}) \cap \bar{U}) \cup (X_2 \times X_1) \cup (X_2 \times S) \cup (S \times X_1) \\ \cup (\mathcal{Z} \cap \bar{U})$$

et posons :

$$X_2^1 = \{x \in X_2; xz \notin U \text{ et } xt \notin U\}$$

$$X_2^2 = \{x \in X_2; xz \notin U \text{ et } xt \in U\}$$

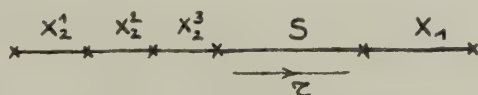
$$X_2^3 = \{x \in X_2; xz \in U \text{ et } xt \in U\}$$

comme $zt \in U$, $\{X_2^1, X_2^2, X_2^3\}$ est une partition de X_2 ;

soit τ_1 un ordre total sur X tel que :

- tout élément de $X - X_1$ précède tout élément de X_1
- tout élément de X_2 précède tout élément de $X - X_2$
- tout élément de X_2^1 précède tout élément de X_2^2 ,
lesquels précèdent tout élément de X_2^3
- la restriction de τ_1 à S est égale à τ

on peut schématiser τ_1 de la façon suivante :



on constate aisément que τ_1 est un ordre total sur X compatible à gauche avec H_1 , qui est donc un graphe de Ferrers (cf. cond (7), thm 2, p. I - 18) ;

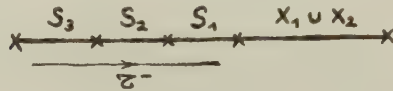
- posons $H_2 = (X, V_2)$ avec

$$V_2 = (S_2 * \{z\}) \cup (S_3 * \{z, t\}) \cup (\tau^{-1} \cap \bar{U})$$

soit τ_2 un ordre total sur X tel que :

- tout élément de S précède tout élément de $X_1 \cup X_2$
- la restriction de τ_2 à S est égale à τ

on peut schématiser τ_2 de la façon suivante :



on vérifie aisément que τ_2 est un ordre total sur X
compatible à gauche avec H_2 , qui est donc un graphe de
Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. I - 18) ;

2^{ème} cas : pour tous $z, t \in X_2$, $z \neq t$, on a $zt \notin U$

soient $z, t \in X_2$;

posons :

$$S_1 = \{s \in S ; st \notin U \text{ et } sz \in U\}$$

$$S_2 = \{s \in S ; st \in U \text{ et } sz \in U\}$$

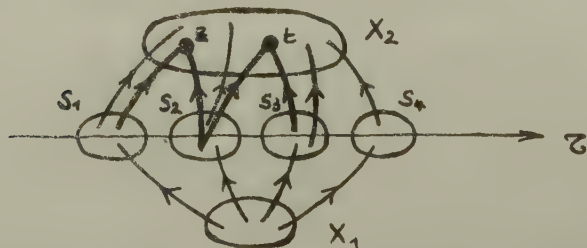
$$S_3 = \{s \in S ; st \in U \text{ et } sz \notin U\}$$

$$S_4 = \{s \in S ; st \notin U \text{ et } sz \notin U\}$$

$\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ est manifestement une partition de S ;

soit τ un ordre total sur S tel que si $s \in S_i$ et $s' \in S_j$
avec $i < j$, alors $ss' \in \tau$;

on peut représenter le graphe G par la figure ci-dessous :



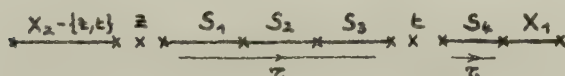
• posons $H_1 = (X, V_1)$ avec

$$\begin{aligned} V_1 = & ((X_2 - \{z, t\}) * (\{z, t\} \cup S \cup X_1)) \cup (\{zz\} \cap \bar{U}) \\ & \cup (\{z\} * (\{t\} \cup S \cup X_1)) \cup (S * X_1) \cup (\bar{C} \cap \bar{U}) \\ & \cup (S_1 * \{t\}) \cup (\{t\} * (S_4 \cup X_1)) \end{aligned}$$

soit τ_1 un ordre total sur X tel que :

- tout élément de $X_2 - \{z, t\}$ précède z
- z précède tout élément de S
- tout élément de $S - S_4$ précède t
- t précède tout élément de S_4
- tout élément de $S \cup X_2$ précède tout élément de X_1
- la restriction de τ_1 à S est égale à $\bar{C}$

on peut schématiser τ_1 de la façon suivante :



on vérifie aisément que τ_1 est un ordre total sur X compatible à gauche avec H_1 , qui est donc un graphe de Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. I - 18) ;

• posons $H_2 = (X, V_2)$ avec

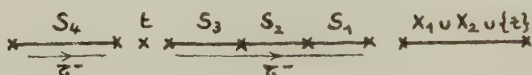
$$\begin{aligned} V_2 = & (S_4 * \{z, t\}) \cup \{tz\} \cup (\{tt\} \cap \bar{U}) \cup (\{t\} * (S_1 \cup S_2 \cup S_3)) \\ & \cup (S_3 * \{z\}) \cup (\bar{C} \cap \bar{U}) \end{aligned}$$

soit τ_2 un ordre total sur X tel que :

- tout élément de $S \cup \{t\}$ précède tout élément de $X_1 \cup X_2 \cup \{z\}$

- tout élément de S_4 précède t
- t précède tout élément de $S - S_4$
- la restriction de τ_2 à S est égale à τ^-

on peut schématiser τ_2 de la façon suivante :



on vérifie aisément que τ_2 est un ordre total sur X compatible à gauche avec H_2 , qui est donc un graphe de Ferrers (cf. cond. (7), thm 2, p. I-18) ;

conclusion commune aux deux cas

posons $H = (X, V)$ avec

$$V = ((S \cup X_2) \times (X_1 \cup S \cup \{z, t\})) \cap \bar{U}$$

on vérifie aisément que $H = H_1 \cup H_2$, et il est clair que

$$\bar{G} = H_1 \cup H_2 \cup \left(\bigcup_{x \in X_1} F_G^+(x) \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{x \in X_2 \\ x \neq z, t}} F_G^-(x) \right)$$

(cf. p. II-16 pour les notations F_G^+ et F_G^-), d'où on déduit que $d_F(G) \leq |X_1| + |X_2|$.

REMARQUE 1

En fait, le lemme page IV-13 peut s'énoncer :

" si μ est un chemin d'un graphe G transitif, alors $\bigcup_{x \in \mu} F_G^+(x)$

et $\bigcup_{x \in \mu} F_{\vec{a}}^-(x)$ sont tous deux des graphes de Ferrers".

En reprenant la démonstration de la propriété 2, on constate qu'on peut "l'améliorer":

"sous les mêmes hypothèses, soient respectivement μ_1 et μ_2 des chemins de $G[X_1]$ et $G[X_2]$ tels que deux sommets au moins de X_1 ne soient pas sur μ_1 , ou deux sommets au moins de X_2 ne soient pas sur μ_2 ; si $|\mu_1|$ et $|\mu_2|$ sont les longueurs respectives de ces chemins, on a : $d_F(G) \leq |X_1| + |X_2| - |\mu_1| - |\mu_2|$ "

REMARQUE 2

Reprenons la démonstration de la propriété 2 dans le cas où $|X_2| \geq 2$, et posons $X'_2 = X_2 - \{z, t\}$.

Soit $C = \{x_i y_i ; 1 \leq i \leq h\}$ un couplage du graphe biparti $G' = (X_1, X', (X_1 \times X') \cap \bar{U})$. Comme $G_i = (X, U_i) = F_{\vec{a}}^+(x_i) \cup F_{\vec{a}}^-(y_i)$ est un graphe de Ferrers (car on ne peut avoir $x_i x' \star_{G_i} y' y_i$, puisque $x_i y_i \in \bar{U}$ et donc $x_i y_i \notin U_i$), on en déduit :

"sous les mêmes hypothèses, si C est un couplage de G' , on a : $d_F(G) \leq |X_1| + |X_2| - |C|$ "

REMARQUE 3

La propriété 2 ci-dessus n'envisage pas les cas où

$$|X_1| + |X_2| \leq 1.$$

On peut alors factoriser $d_F(G)$ suivant la dimension Ferrers de ses composantes connexes (cf. pté^{a)} page II-20), et chaque composante est un graphe de dimension égale à 1 ou à 2.

En particulier, on a alors $d_F(G) \leq 2$.

On déduit de la propriété 2 ci-dessus le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 3

Si G est un graphe transitif tel que

$\alpha(G) \leq n(G) - 2$, alors

$$d_F(G) \leq n(G) - \alpha(G)$$

démonstration :

si $|X_1| + |X_2| \geq 2$, on peut appliquer la propriété 2 précédente :

$$d_F(G) \leq |X_1| + |X_2| \leq |X_1| + |X_2| + |X'| = n(G) - \alpha(G)$$

si $|X_1| + |X_2| \leq 1$, d'après la remarque 3 précédente, on a :

$$d_F(G) \leq 2 \leq n(G) - \alpha(G)$$

REMARQUE 4

Compte tenu de la remarque 3 ci-dessus, les graphes G pour lesquels l'inégalité $d_F(G) \ll n(G) - \alpha(G)$ n'est pas satisfaite vérifient $d_F(G) \ll 2$ (par exemple, la réunion de deux ou trois boucles disjointes).

Les propriétés 1 page IV - 14 et propriété 3 page IV - 26 permettent de montrer que la majoration $d_F(G) \ll n(G)$ (cf. pté 2, p. II - 16) n'est plus, lorsqu'on se restreint aux graphes transitifs, la meilleure possible en général :

THEOREME 2

Soit G un graphe transitif avec $n(G) \geq 4$.

Alors : $d_F(G) \ll \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$

démonstration :

on a toujours $d_F(G) \ll \alpha(G)$ (cf. pté 1, p. IV - 14);

si on a $d_F(G) \ll n(G) - \alpha(G)$, le résultat est évident;

si on a $d_F(G) > n(G) - \alpha(G)$, on a aussi $d_F(G) \ll 2$ (cf. rem. 4 ci-dessus); comme $n(G) \geq 4$, le résultat est tout aussi évident.

Nous connaissons des graphes transitifs, ayant au moins quatre sommets, pour lesquels l'inégalité du théorème 2 ci-dessus est en fait une égalité, et nous appelons ces graphes les graphes extrémaux pour le thm 2.

Par exemple, si G est un graphe satisfaisant $d_F(G) = n(G)$, i.e. $\bar{G}$ est une réunion disjointe de circuits élémentaires (cf. pté 3, p. II-17), et si $H = B(G)$, alors H est manifestement transitif et, comme $d_F(H) = d_F(G)$ (cf. pté 1, p. II-6), on a $d_F(H) = \frac{n(H)}{2}$.

Appelons F-irréductible tout graphe dont la dimension Ferrers est strictement supérieure à celles de ses sous-graphes stricts. Compte tenu de la remarque 4 page IV-27 et de la propriété page II-10, le résultat suivant se vérifie facilement :

PROPRIÉTÉ 4

Les graphes extrémaux pour le thm 2 sont exactement :

- si $n(G) = 4, 5$, tous les graphes transitifs qui ne sont pas des graphes de Ferrers
- si $n(G) = 2p \gg 6$, tous les graphes F-irréductibles extrémaux pour le thm 2
- si $n(G) = 2p+1 \gg 7$, tous les graphes F-irréductibles extrémaux pour le thm 2, et tous les graphes transitifs admettant comme sous-graphe un graphe à $2p$ sommets, F-irréductible et extrémal pour le thm 2

Ainsi la détermination des graphes extrémaux pour le thm 2 se ramène à la détermination des classes $\underline{\mathcal{F}}_n$, où $n \geq 6$, des graphes à n sommets et qui sont F -irréductibles et extrémaux pour le thm 2. On note $\underline{\mathcal{F}}'_n$ la classe des ordres appartenant à $\mathcal{F}_n$.

Or on constate que :

PROPRIETE 5

Les graphes transitifs F -irréductibles sont anti-symétriques.

démonstration :

soit $G = (X, U)$ un graphe transitif et soient $x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $xy, yx \in U$; alors $\varphi : X \rightarrow X$ telle que $\varphi(t) = t$ pour $t \in X - \{y\}$ et $\varphi(y) = x$, est un plongement surjectif de G dans $G[X - \{y\}]$; la propriété page II - 11 permet de conclure.



Ce résultat, avec la propriété²⁾ page IV - 6, permet alors de conclure immédiatement :

PROPRIETE 6

Si $G \in \mathcal{F}_n$, alors $G^T \in \mathcal{F}'_n$

Nous serons en mesure, à la fin du chapitre suivant, de prouver que :

- $\mathcal{F}'_n$ est connue
- la propriété 6 ci-dessus admet une réciproque, sauf pour $n=6$ et $n=7$

Nous renvoyons donc page V - 17 la fin de la détermination de $\mathcal{F}_n$, et, par conséquent, de celle des graphes extrémaux pour le thm 2 .

5 - DIMENSION FERRERS DU GRAPHE REDUIT D'UN GRAPHE TRANSITIF.

DIMENSION FERRERS DES PSEUDO-ORDRES

A tout graphe G quelconque, il est classique d'associer son graphe réduit, noté $G_r = (X_r, U_r)$, et défini de la façon suivante :

- soient $G[X_1], \dots, G[X_k]$ les composantes fortement connexes de G
- $X_r = \{X_1, \dots, X_k\}$
- $U_r = \{X_i X_j; \exists x \in X_i \exists y \in X_j \quad xy \in U\}$

G_r est alors un graphe transitif, sans circuit et, en particulier, anti-symétrique.

Remarquons que si G_i est un graphe obtenu en ajoutant i arcs, $0 \leq i < n$, à un graphe G_0 complémentaire d'un circuit élémentaire de longueur n , sans ajouter de nouveau sommet, on a $d_F(G_i) = n - i$, tandis que $d_F((G_i)_r) = 1$, puisque $(G_i)_r$ est réduit à une boucle (on pourra remarquer que $(\overline{G_i})^*$ est une clique à $n-i$ éléments).

Il ne semble donc pas qu'il existe un rapport général simple entre $d_F(G)$ et $d_F(G_r)$ pour les graphes quelconques.

Par contre, si $G = (X, U)$ est un graphe transitif, ses composantes fortement connexes non réduites à un sommet sont des sous-graphes de G qui sont des graphes complets symétriques dont tous les sommets sont des sommets jumeaux relativement à G .

Il est clair qu'alors l'application $\varphi_x : X \rightarrow X_r$ qui, à tout sommet $x \in X$, associe sa classe $X_i \in X_r$ est un plongement surjectif de G dans G_r , et la propriété page II - 11 permet de conclure :

PROPRIÉTÉ 1

Pour tout graphe G transitif,

$$d_F(G) = d_F(G_r)$$

On peut donc ramener l'étude de la dimension Ferrers des graphes transitifs à celle de la dimension Ferrers des graphes transitifs et anti-symétriques que nous appelons les pseudo-ordres. Les pseudo-ordres de Ferrers sont alors les pseudo-ordres qui sont également des graphes de Ferrers.

Ainsi, en reformulant en partie le théorème 2 page I-47 , tout graphe de Ferrers minimal contenant un pseudo-ordre est un pseudo-ordre de Ferrers, ce qui nous permet de déduire immédiatement de la définition de la dimension Ferrers (cf. déf. p. II - 4) :

THEOREME

Si G est un pseudo-ordre, $d_F(G)$ est le plus petit nombre de pseudo-ordres de Ferrers dont G est l'intersection, et c'est également le plus petit nombre de pseudo-ordres de Ferrers tel qu'il existe un plongement de G dans leur produit strict.

REMARQUE

Le théorème 2 page I-47 nous permet en outre d'exiger que les pseudo-ordres de Ferrers du théorème ci-dessus aient exactement les mêmes sommets bouclés que G .

La propriété 2 page IV - 3 peut être renforcée de la façon suivante :

PROPRIÉTÉ 2

Si $G = (X, U)$ est un pseudo-ordre, alors $d_F(G)$ est le plus petit nombre de graphes de Ferrers totaux inclus dans G^d , contenant chacun $G_A \cup (\bar{G})_A$ et dont la réunion couvre G^I .

démonstration :

on peut exiger que les graphes de Ferrers, soient $G_i = (X, U_i)$ pour $1 \leq i \leq k$, de la condition (2) de la propriété 2 page IV-3 soient maximaux pour ces propriétés; il suffit alors de démontrer que les G_i sont totaux;

on peut le montrer par passage au dual et en utilisant le thm 2 page I - 47 ; nous allons le montrer directement (ce qui permettrait une autre démonstration du thm 2 cité);

supposons G_i non total et soient $x, y \in X$, avec $x \neq y$, tels que $xy, yx \notin U_i$; donc $xy, yx \notin U_A$, et par conséquent, $xy, yx \in (\bar{U})_S \subseteq U^d$, puisque G est anti-symétrique;

comme G_i est maximal, la propriété 2 page III - 28 montre qu'il existe $ab, cd \in U_i$ tels que $xy \stackrel{G^d}{*} ab$ et $yx \stackrel{G^d}{*} cd$;

comme $xb, ay \notin U^d$, on a $bx, ya \in U$, et, de même, on a $dy, xc \in U$;
 comme G est transitif, on a donc $bc, da \in U$, donc $cb, ad \notin U^d \supset U_i$,
 et, par conséquent, $ab \stackrel{G_i}{*} cd$, ce qui contredit le fait que G_i
 est un graphe de Ferrers.

Concluons ce paragraphe par deux problèmes.

Les pseudo-ordres sont les graphes G tels que G^r soit un ordre, et la propriété 2 page IV-6 montre que $d_F(G) \leq d_F(G^r)$.

En fait, on connaît une relation plus précise dans le cas particulier où G est un pseudo-ordre de hauteur 1 :

il existe alors un graphe H tel que G ne diffère éventuellement de $B(H)$ que par des sommets isolés, et la propriété 1 page II-6 et le théorème page II-31 nous permettent de conclure

$$d_F(G) \leq d_F(G^r) \leq d_F(G) + 1$$

Nous pouvons donc généraliser le problème page II-36 en posant :

PROBLEME 1

Caractériser les pseudo-ordres G pour lesquels

$$d_F(G) = d_F(G^r).$$

De plus, nous pensons que la seconde inégalité est susceptible d'être généralisée aux pseudo-ordres, et nous posons :

PROBLEME 2

Existe-t-il des pseudo-ordres G tels que

$$d_F(G^r) > d_F(G) + 1 \quad ?$$

On remarquera que, du fait que pour tout graphe G on a $(G_r)^r = (G^r)_r$, et compte tenu de la propriété page IV-31, il est équivalent de prouver les inégalités $d_F(G) \leq d_F(G^r) \leq d_F(G) + 1$ pour les graphes transitifs en général, ou directement pour les pseudo-ordres.

CHAPITRE V

DIMENSION FERRERS ET DIMENSION ORDRE

1 - UNE EXTENSION DE LA DIMENSION DES ENSEMBLES ORDONNES

En 1941, B. Dushnik et E. Miller [DUS-MIL] ont proposé d'appeler dimension d'un ensemble ordonné le plus petit nombre d'ordres totaux dont il est l'intersection. Si G est un ordre, nous désignerons ce nombre par $d_0(G)$, et nous l'appellerons la dimension ordre de G . Le célèbre lemme de E. Szpilrajn [SZP] assure que $d_0(G)$ est définie pour tout ordre G .

A tout graphe $G = (X, U)$, associons l'ordre $\sigma(G) = (\Phi(G), \leq)$ où $\Phi(G)$ est défini de la façon suivante :

1) pour tout $x \in X$, on pose

$$\varphi_1(x) = \{t \in X; \Gamma_G^+(t) \supseteq \Gamma_G^+(x)\}$$

2) pour tout $x \in X$, on pose

$$\varphi_2(x) = \Gamma_G^-(x)$$

3) on pose $\Phi(G) = \varphi_1(X) \cup \varphi_2(X)$

De la définition de $\sigma(G)$, on déduit aisément :

LEMME

Pour tout graphe $G = (X, U)$ et pour tous $x, y \in X$,

$$xy \in U \text{ ssi } \varphi_1(x) \subseteq \varphi_2(y)$$

Nous pouvons alors en déduire le résultat suivant :

PROPRIETE 1

G est un ordre ssi G est isomorphe à $\mathcal{O}(G)$

démonstration :

la condition nécessaire étant une trivialité, montrons la condition suffisante;

parce que $G = (X, U)$ est réflexif et transitif, on constate que pour tout $x \in X$, $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$; et parce que G est anti-symétrique, on constate que, pour tous $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \varphi_2(x) \neq \varphi_2(y)$; le lemme permet alors de conclure.



On pourrait donc étendre d_0 à tout graphe G en considérant $d_0(\mathcal{O}(G))$ plutôt que $d_0(G)$.

Le résultat suivant montre que d_F est précisément cette extension de d_0 :

THEOREME 1

Pour tout graphe G , $d_F(G) = d_0(\mathcal{O}(G))$

démonstration :

posons $\sigma(G) = \sigma$, $\Phi(G) = \Phi$, et $G = (X, U)$;

● supposons que $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$ où les $G_i = (X, U_i)$ sont des graphes de Ferrers ;

pour tout $A \in \Phi$ et pour tout i , posons $f_i(A) = \min_{x \in A} \delta_i^+(x)$,
où $\delta_i^+(x)$ désigne le numéro de la classe de x dans la partition
de X associée au demi-degré extérieur dans G_i (cf. p. I-2) ;

nous allons montrer que l'application f telle que

$f(A) = (f_1(A), f_2(A), \dots, f_k(A))$ est un plongement de σ dans
 $(\mathbb{N}, \geq)^k$;

tout d'abord, il est clair que pour tout i et pour tous

$A, B \in \Phi$, on a $A \subseteq B \Rightarrow f_i(A) \geq f_i(B)$; autrement dit, pour
tous $A, B \in \Phi$, on a $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \geq f(B)$;

supposons par contre que $A \not\subseteq B$, avec $A, B \in \Phi$:

1^{er} cas : $B = \varphi_1(x)$, avec $x \in X$

alors il existe $t \in A$ et $y \in X$ tels que $ty \notin U$ tandis que
 $xy \in U$, d'où on déduit également que $by \in U$ pour tout
 $b \in B$; ainsi il existe un i pour lequel $ty \notin U_i$ tandis
que $by \in U_i$ pour tout $b \in B$, et en particulier tel que

$\delta_i^+(t) < \delta_i^+(b)$ pour tout $b \in B$; on a donc $f_i(A) < f_i(B)$;

2^{ème} cas : $B = \varphi_2(x)$ avec $x \in X$

alors il existe $t \in A$ tel que $tx \notin U$; donc il existe un i tel que $tx \notin U_i$ tandis que $bx \in U_i$ pour tout $b \in B$; comme dans le premier cas, on a $f_i(A) \not\leq f_i(B)$;

en conséquence, dans tous les cas, on a $f(A) \not\leq f(B)$;

ainsi, nous avons montré que :

$$\forall A, B \in \Phi \quad A \subseteq B \iff f(A) \geq f(B)$$

autrement dit, f est bien un plongement de $\mathcal{O}$ dans $(\mathbb{N}, \geq)^k$, c'est-à-dire dans le produit strict de k ordres totaux;

- supposons maintenant qu'il existe un plongement f de $\mathcal{O}$ dans le produit strict $(E, \leq) = \prod_{1 \leq i \leq k} (E_i, \leq_i)$ de k ordres totaux;

on pose encore $f(t) = (f_1(t), \dots, f_k(t))$ et, pour chaque i , soit $G_i = (X, U_i)$ le graphe tel que :

$$\forall x, y \in X \quad xy \in U_i \iff f_i(\varphi_1(x)) \leq f_i(\varphi_2(y))$$

en posant $\varphi_1^i = f_i \circ \varphi_1$ et $\varphi_2^i = f_i \circ \varphi_2$, il est clair que la condition (F5) du thm 1 page I-5 permet de conclure que G_i est un graphe de Ferrers;

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} xy \in U &\iff \varphi_1(x) \leq \varphi_2(y) \iff f(\varphi_1(x)) \leq f(\varphi_2(y)) \\ &\iff \text{pour tout } i, f_i(\varphi_1(x)) \leq f_i(\varphi_2(y)) \iff \\ &\text{pour tout } i, xy \in U_i \iff xy \in \bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i \end{aligned}$$

par conséquent $G = \bigcap_{1 \leq i \leq k} G_i$, c'est-à-dire que G est

l'intersection de k graphes de Ferrers;

- l'équivalence, due à O. Ore [ORE] et démontrée dans le cadre de la théorie des ensembles ordonnés, des conditions (1) et (2) du théorème 1 page V-12 permet de conclure que $d_F(G) = d_0(\mathcal{O}(G))$.



ainsi, en utilisant la correspondance $G \rightsquigarrow \mathcal{O}(G)$, on pourrait traduire en termes de dimension Ferrers les résultats de la théorie de la dimension ordre, et il pourrait être intéressant d'étudier les graphes G dont l'ordre associé $\mathcal{O}(G)$ satisfait une propriété P donnée.

REMARQUE

En utilisant la terminologie définie dans [BOU], les $\varphi_1(x)$, pour $x \in X$, sont les clôtures gauches principales, tandis que les $\varphi_2(x)$ sont les clôtures atomiques. On peut alors en déduire que $\mathcal{O}(G)$ est un sous-ordre générateur de $\text{Gal}(G)$, et qu'en particulier, $d_0(\mathcal{O}(G)) = d_0(\text{Gal}(G))$.

Il serait donc également intéressant d'étudier les graphes dont le treillis de Galois satisfait une propriété P donnée, domaine encore peu exploré semble-t-il.

Le paragraphe 3 de ce chapitre présente une seconde façon d'envisager d_F comme extension de d_0 , qui nous permettra, elle, de traduire directement en termes de dimension ordre les résultats généraux relatifs à la dimension Ferrers.

2 - CARACTERISATION DE LA F-INCOMPATIBILITE ET DE LA F-EXTENSIBILITE

DANS LE DUAL D'UN ORDRE

Tout d'abord, si G est un ordre, on a $G^d = G_A \cup G^I$, et la propriété 1 page IV - 2 devient

PROPRIETE 1

Si $G = (X, U)$ est un ordre, alors $P(G^d) = U_A$

démonstration :

d'après la propriété 1 page IV - 2, on sait que $U_A \subseteq P(G^d)$;
 d'autre part, si $xy \in U^I$, on a évidemment $xy \stackrel{G^d}{*} yx$, et donc
 $xy \notin P(G^d)$.

Ainsi, les arcs de G^d qui sont F-incompatibles dans G^d avec
 d'autres arcs de G^d sont les arcs d'incomparabilité de G .

La F-incomparabilité dans G^d s'exprime alors de la façon
 suivante :

PROPRIETE 2

Deux arcs d'incomparabilité $u, v \in U^I$ d'un ordre $G = (X, U)$ sont F-incompatibles dans le dual G^d ssi le graphe $G' = (X, U_A \cup \{u, v\})$ possède un circuit.

démonstration :

- soient u et v deux arcs de G^I , avec $u = xy$ et $v = zt$, et qui soient F-incompatibles dans G^d ;

on a donc $xy \star_{G^d} zt$, et, en particulier, $xt, zy \notin U^d$, c'est-à-dire $tx, yz \in U$;

alors $\mathcal{V} = (x, y, z, t, x)$ est un circuit, non nécessairement élémentaire, de $G'' = (X, U \cup \{u, v\})$, et, comme $x \neq y$, on peut déduire de $\mathcal{V}$ un circuit de G' ;

- soit $\mathcal{V} = (a_0, a_1, \dots, a_p = a_0)$ un circuit élémentaire de G' ;

comme G est un ordre, u et v sont nécessairement des arcs de $\mathcal{V}$; supposons par exemple que $a_0 = x$, $a_1 = y$, $a_i = z$ et $a_{i+1} = t$ avec $i \in [1, p-1]$, soit $\mathcal{V} = (x, y, \dots, a_i = z, a_{i+1} = t, \dots, a_p = x)$;

si $i=1$, on a $y=z$ et donc $zy \in U_A \not\in U^d$;

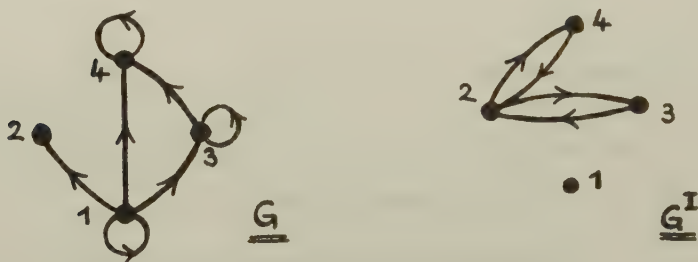
si $i>1$, on a $yz \in U_A$ et donc $zy \not\in U^d$;

de même, que $i+1=p$ ou que $i+1 < p$, on a $xt \not\in U^d$;

dans tous les cas, on a bien $xy \star_{G^d} zt$.

REMARQUE 1

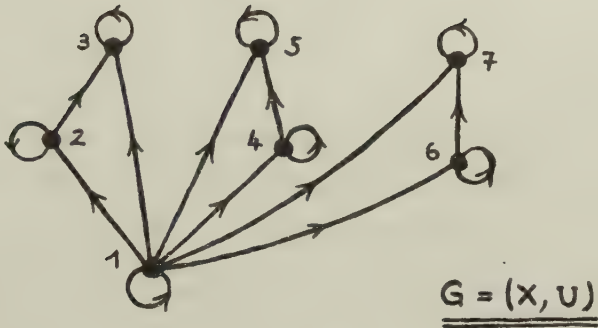
Le graphe G de la figure ci-dessous montre que la réflexivité est effectivement requise dans l'énoncé de la propriété 2



G est un pseudo-ordre de Ferrers ($\Gamma^+(1) \supset \Gamma^+(3) \supset \Gamma^+(4) \supset \Gamma^+(2)$)
 donc G^d est également un graphe de Ferrers (cf. pté 3 p. I - 24)
 et U^I est donc trivialement F -extensible dans G^d ;
 or 42 et 23 ferment dans G_A le circuit (4,2,3,4).

De la propriété 2 ci-dessus, on déduit que toute partie $V \subseteq U^I$ qui est F -extensible dans G^d est constituée d'arcs d'incomparabilité de sorte que le graphe obtenu en ajoutant à G deux arcs quelconques de V est encore sans circuit.

Mais le chapitre II nous a montré qu'en général, la stabilité dans H^* n'entraîne pas la F -extensibilité dans H^* , et l'exemple de la figure suivante montre qu'il en est encore de même lorsque H est le dual d'un ordre.



soit $V = \{34, 56, 72\} \in U^I$; si $u, v \in V$, avec $u \neq v$, le graphe $G' = (X, U \cup \{u, v\})$ est bien sans circuit;

mais V n'est pas F -extensible dans G^d : sinon, soit $H = (X, W) \subseteq G^d$ un graphe de Ferrers tel que $W \supseteq V$; alors $36 \in W$, sinon $34 \stackrel{H}{*} 56$, et alors $36 \stackrel{H}{*} 72$, ce qui contredit le fait que H est un graphe de Ferrers

Cependant, on peut remarquer, dans l'exemple précédent, que le graphe $G'' = (X, U \cup V)$ possède un circuit (à savoir le circuit $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$) tandis que V n'est pas F -extensible dans G^d .

Nous allons établir un lemme avant de montrer que ce résultat est général.

LEMME

Soit $G = (X, U)$ un graphe sans circuit autre que des boucles et soit W tel que $U_A \subseteq W \subseteq U^d$ et tel que $H = (X, W)$ soit un graphe sans circuit autre que des boucles. S'il existe

$u, v \in W$ tels que $u \overset{H}{\neq} v$, alors il existe $w \in U^d - W$ tel que,
 en posant $W' = W \cup \{w\}$ et $H' = (X, W')$, H' soit également
 un graphe sans circuit autre que des boucles.

démonstration :

on considèrera qu'un sommet constitue un chemin à lui tout seul;
 on remarque que G est anti-symétrique et on pose $u = xy$ et $v = zt$;
 autrement dit, $xy, zt \in W$ et $xt, zy \notin W$;

1^{er} cas : il n'existe pas dans H de chemin de t à x

en particulier, $t \neq x$ et $tx \notin U_A \subseteq W$; par conséquent, $tx \notin U$
 (sinon $tx \in U_S = U_\Delta$, or $t \neq x$) et donc $xt \in U^d - W$;
 xt est l'arc w cherché;

2^{ème} cas : il existe dans H un chemin $\lambda = (t, \dots, x)$ de t à x
 (éventuellement $\lambda = (t) = (x)$ si $t = x$)

alors $\mu = (z, \underbrace{t, \dots, x}_\lambda, y)$ est un chemin de z à y dans H ;

donc $z \neq y$ (car sinon, H n'admettant comme circuit que des boucles,
 on aurait $z = t = x = y$, ce qui contredit $xy \overset{H}{\neq} zt$) et $yz \notin U_A \subseteq W$
 (car sinon $\nu = (\underbrace{z, \dots, y}_\mu, z)$ serait un circuit de H autre qu'une
 boucle); par conséquent, $yz \notin U$ (sinon $yz \in U_S = U_\Delta$, or $y \neq z$),
 et donc $zy \in U^d - W$;

zy est l'arc w cherché, car l'existence de μ avec $z \neq y$ interdit
 qu'il existe dans H un chemin de y à z .

Nous pouvons maintenant montrer :

PROPRIÉTÉ 2

Soit $G = (X, U)$ un ordre et soit $V \subseteq U^I$. Alors,
 V est F -extensible dans G^d ssi le graphe
 $H = (X, U_A \cup V)$ est sans circuit.

démonstration :

- soit $V \subseteq U^I$ un ensemble F -extensible dans G^d , c'est-à-dire qu'il existe un graphe de Ferrers $H_1 = (X, W) \subseteq G^d$ tel que $V \subseteq W$, et supposons H_1 maximal pour ces propriétés; compte tenu de la propriété 1 page V - 6 et de la propriété 2 page III - 28, on a $U_A \subseteq W$, et donc $H \subseteq H_1$; d'autre part, comme G est réflexif et comme $H_1 \subseteq G^d$, H_1 est un ordre d'intervalle (i.e. un graphe de Ferrers anti-réflexif, cf. p. I - 34), et donc un graphe sans circuit; par conséquent, H est également un graphe sans circuit;
- soit $V \subseteq U^I$ tel que $H = (X, U_A \cup V)$ soit sans circuit; soit W satisfaisant $U_A \cup V \subseteq W \subseteq U^d$ et $H' = (X, W)$ sans circuit, et maximal pour ces propriétés; le lemme ci-dessus nous permet de conclure que H' est un graphe de Ferrers, et V est bien F -extensible dans G^d .

3 - CARACTERISATIONS DE $d_F(G)$ LORSQUE G EST UN ORDRE

Il découle de résultats précédemment établis que :

THEOREME 1 [voir p. V-13,14]

Si $G = (X, U)$ est un ordre, alors $d_F(G)$ est le plus petit entier k tel que :

- (1) il existe k ordres totaux dont G est l'intersection
- (2) il existe k ordres totaux tels qu'il existe un plongement de G dans leur produit strict
- (3) il existe k ordres d'intervalle dont G^d ou $\overline{G}$ est la réunion
- (4) il existe k ordres stricts totaux contenant chacun G_A et dont la réunion couvre G^I
- (5) il existe un recouvrement $\{U_1, \dots, U_k\}$ de U^I tel que pour tout $i \in [1, k]$, $G_i = (X, U_A \cup U_i)$ soit un graphe sans circuit

démonstration :

- (1) et (2) : immédiat, compte tenu du théorème page IV - 32 ,
 puisque dans (1) les pseudo-ordres considérés sont réflexifs,
 donc des ordres de Ferrers, qui ne sont autres que des ordres
 totaux;
- (3) : c'est une reformulation des conditions (2) et (2bis) du
 théorème page II - 2 et tenant compte du fait que $(G^d)_\Delta = \emptyset$
 et que les ordres d'intervalle sont les graphes de Ferrers
 anti-réflexifs;
- (4) : c'est une reformulation de la propriété 2 page IV - 33 et
 tenant compte du fait que $(\bar{G})_\Delta = \emptyset$, que les graphes
 de Ferrers anti-réflexifs sont des ordres stricts et que
 les ordres stricts contenant G_A sont inclus dans G^d ;
- (5) : c'est une reformulation de la condition (1) de la propriété 2
 page IV - 3 et tenant compte de la propriété 2 page V - 11 .

Ainsi, la condition (1) du théorème ci-dessus, qui a été
 établie par A. Bouchet [BOU] (la démonstration donnée ici étant
 toutefois originale) permet de remplacer, dans la définition de la
 dimension ordre posée par B. Dushnik et E. Miller (cf. p. V - 1),
 "ordres totaux" par "graphes de Ferrers", ce qui procure une seconde

façon de considérer la dimension Ferrers comme une extension de la dimension ordre (cf. § 1 de ce chapitre) :

THEOREME 2 [BOU]

Si G est un ordre, alors $d_F(G) = d_O(G)$

Le théorème 1 ci-dessus montre, comme découlant de résultats plus généraux, l'équivalence de cinq conditions avec la condition : G est l'intersection de k graphes de Ferrers.

En fait, pour un ordre G , les équivalences des conditions (1), (2), (4) et (5) sont bien connues dans le cadre de la théorie de la dimension ordre.

Plus précisément, l'équivalence des conditions (1) et (2) est un théorème dû à O. Ore [ORE], l'équivalence des conditions (1) et (5) est un théorème dû à W. T. Trotter et J.I. Moore [TRO-MOO, a], et l'équivalence des conditions (1) et (4) est couramment utilisée.

On peut également utiliser le théorème 2 ci-dessus pour exprimer, dans le cas particulier des ordres, des résultats généraux relatifs à la dimension Ferrers.

Ainsi, du théorème page II - 12 , nous déduisons un résultat dû à H. Kohn et à O. Ore :

THEOREME 3 [KOM,ORE]

Le produit strict de k ordres totaux (non réduits à un sommet) est de dimension ordre égale à k .

R. Kimble [KIM] a défini le "split" $S(G)$ d'un ordre G comme étant ce que nous avons noté $B^r(G)$. Du théorème page II - 31 , nous déduisons :

THEOREME 4 [KIM]

Pour tout ordre G , on a :

$$d_0(G) \ll d_0(S(G)) \ll d_0(G) + 1$$

Un des résultats les plus célèbres concernant les majorations de $d_0(G)$ est dû à T. Hiraguchi. Le théorème 2 page IV - 27 nous permet d'écrire :

THEOREME 5 [HIR]

Pour tout ordre G tel que $n(G) \geq 4$, on a :

$$d_0(G) \ll \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$$

La propriété 1 page IV - 14 et la propriété 3 page IV - 26 qui nous ont conduit à ce théorème 2 page IV - 27 s'expriment également en termes de dimension ordre (permettant à W.T. Trotter de donner une démonstration directe très rapide pour le théorème 5 ci-dessus) :

THEOREM 6 [HIR]

Pour tout ordre G , on a $d_0(G) \leq \alpha(G)$

THEOREME 7 [TRO]

Pour tout ordre $G = (X, U)$ et pour tout ensemble

S stable pour G tel que $|X - S| \geq 2$, on a :

$$d_0(G) \leq |X - S|$$

Enfin, en regroupant la propriété 1 page II - 20 et la propriété 1 page IV - 8, on obtient un théorème de décomposition dû à A. Ducamp :

THEOREME 8 [DUC]

Si $G = (X, U)$ est un ordre non total et si

$\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ est la partition la moins fine de X telle que $G[X_i]$ et $G^I[X_i]$ soient connexes pour tout i , alors :

$$d_0(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{2, d_0(G[X_i])\}$$

3 - DETERMINATION DE $\mathcal{F}_n$ POUR $n \geq 6$

Compte tenu des résultats du paragraphe 4 du chapitre précédent, la détermination des "graphes extrémaux pour le thm 2"^(p. IV - 27), c'est-à-dire les graphes transitifs G tels que $d_F(G) = \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$, sera complète si on détermine les classes $\mathcal{F}_n$, $n \geq 6$, des pseudo-ordres extrémaux pour le thm 2 (cf. pté 4, p. IV - 28 et pté 5, p. IV - 29). On sait de plus que si $G \in \mathcal{F}_n$, alors $G^r \in \mathcal{F}'_n$, la classe des ordres appartenant à $\mathcal{F}_n$ (cf. pté 6, p. IV - 29).

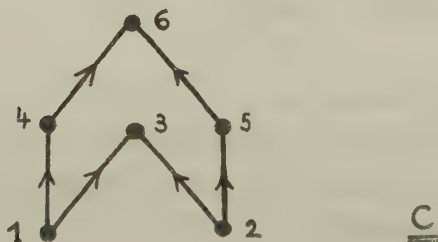
Or le théorème 2 page V - 14 permet de conclure que les $\mathcal{F}'_n$ ont été complètement déterminés dans le cadre de la théorie de la dimension ordre par W.T. Trotter, K.P. Bogart et R. Kimble (cf. par exemple, [TRO-MOO, b]).

Appelons couronne d'ordre n (que W.T. Trotter note S_n^0), l'ordre biparti noté S_n et défini à un isomorphisme près, comme étant la fermeture réflexive de l'ordre strict biparti (A, B, U) où $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ et $U = \{a_i b_j; i \neq j\}$.

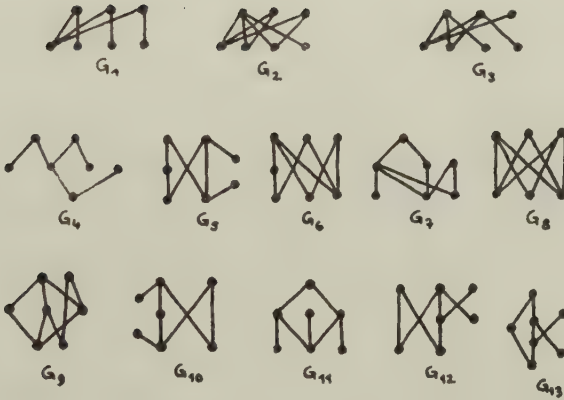
On remarque alors que les couronnes S_n , pour $n \geq 3$, sont les fermetures réflexives des graphes bipartis associés aux graphes G

satisfaisant $d_F(G) = n = n(G)$ (cf. pté 3, p. II-17). On a donc bien $d_F(S_n) = n$ (cf. thm p. II-31 et thm p. IV-27) et, par conséquent, il est clair que pour $n \geq 3$, $S_n \in \mathcal{F}'_{2n}$.

K.P. Bogart et W.T. Trotter [BOG-TRO] ont montré d'une part que si $n = 2p$, avec $p \geq 4$, $\mathcal{F}'_n$ se réduit aux seules couronnes S_p , et que, outre la couronne S_3 , $\mathcal{F}'_3$ ne contient que le chevron C donné, à un isomorphisme près, par la figure ci-dessous, où les arcs de transitivité ainsi que les boucles ont été omis.



D'autre part, W.T. Trotter et R. Kimble [KIM] ont indépendamment montré (cf. aussi [TRO-MOO, 6]) que, ^(si $n = 2p+1$, avec $p \geq 4$), $\mathcal{F}'_n$ est vide, et que $\mathcal{F}'_7$ est constituée des ordres donnés par la figure ci-après (où les boucles et les arcs de transitivité sont omis, les arcs étant indifféremment orientés tous de haut en bas ou tous de bas en haut).



La connaissance de $\mathcal{F}'_n$ va nous permettre de déterminer $\mathcal{F}_n$,
pour $n \geq 3$.

On a d'abord le résultat suivant :

PROPRIÉTÉ 1

Si $G^F = S_n$, avec $n \geq 3$, alors $d_F(G) = n$

démonstration :

$(S_n)_A$ est un graphe biparti associé à un graphe de dimension Ferrers
égale à n (cf. p. II - 19); or, d'après la propriété 1 page IV - 5 ,
on a : $n = d_F(S_n)_A \leq d_F(G) \leq d_F(S_n) = n$.

Ce qui montre en particulier :

PROPRIÉTÉ 2

Pour $n \geq 8$, $G \in \mathcal{F}_n$ ssi $G^r \in \mathcal{F}'_n$.

En particulier, $\mathcal{F}_n$ est vide si n est impair,

et, si $n = 2p$, $\mathcal{F}_n$ est constituée des pseudo-ordres
dont la fermeture réflexive est une couronne S_p .

démonstration :

il suffit de montrer que la propriété 6 page IV - 29 admet une
réciproque;

le résultat est donc trivial pour n impair, puisqu'alors $\mathcal{F}'_n$
est vide;

d'autre part, si $n = 2p$, $p \geq 4$, G^r est une couronne S_p , et la
propriété 1 ci-dessus permet de conclure.



Par contre, la propriété 2 ci-dessus ne s'étend pas aux cas
 $n = 6$ et $n = 7$, c'est-à-dire qu'alors, la réciproque de la propriété 6
page IV - 29 est fausse, comme le montre le résultat suivant :

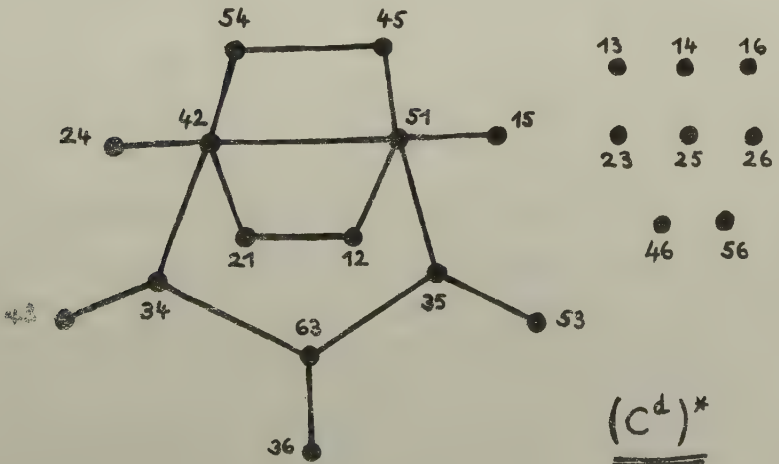
PROPRIETE 3

$\mathcal{F}_6$ est constituée des pseudo-ordres dont la fermeture réflexive est une couronne S_3 et des pseudo-ordres $G = (X, U)$ dont la fermeture réflexive est, à un isomorphisme près, le chevron, et tels que $\{33, 44, 55\} \subseteq U_\Delta$ (voir notations p. V-18).

démonstration :

le résultat relatif à S_3 découle immédiatement de la propriété 1 ci-dessus;

d'autre part, $(C^d)^*$, le graphe des F-incompatibilités associé au dual du chevron C , est donné par la figure ci-dessous :



soit alors $G = (X, U)$ un pseudo-ordre tel que $G^I = C$; on a

$$G^d = G_A \cup (\bar{G})_{\Delta} \cup G^I = C_A \cup C^I \cup (\bar{G})_{\Delta};$$

on en déduit qu'on obtient $(G^d)^*$ à partir de $(C^d)^*$:

- en ajoutant à $(C^d)^*$ les $xx \in (\bar{U})_{\Delta}$ comme sommets isolés (cf. pté 1, p. IV - 2)
- en supprimant de $(C^d)^*$ les arêtes joignant xy à yx et celles joignant yx à xz lorsque $xx \in (\bar{U})_{\Delta}$

en particulier, si $\{33, 44, 55\} \subseteq U$, alors $\lambda = (42, 34, 53, 35, 54)$ est une chaîne de $(C^d)^*$, qui a donc un cycle impair, et, par conséquent, $d_F(G) \geq 3$ (cf. thm p. III - 3);

par contre, si $\{33, 44, 55\} \not\subseteq U$, la chaîne λ n'existe plus dans $(C^d)^*$, et il est clair que $\gamma((C^d)^*) = 2$, et donc que $d_F(G) = 2$ (cf. thm p. III - 21);

la propriété est bien démontrée, compte tenu de la propriété c page IV - 19.



Ainsi, pour finir de déterminer les graphes extrémaux pour le théorème 1 page IV - 17, il suffit de déterminer, parmi les pseudo-ordres dont la fermeture réflexive est égale, à un isomorphisme près, à l'un des ordres de $\mathcal{F}^1$, donnés page 10 ci-dessus, ceux

dont la dimension Ferrers est égale à 3 .

Il est clair que la démarche adoptée à propos du chevron dans la démonstration de la propriété 3 ci-dessus, permet de conclure dans tous les cas, que nous omettrons d'étudier ici en raison de leur trop grande multiplicité.

CHAPITRE VI

GRAPHES A SEUIL . DIMENSION A SEUIL DES GRAPHES
SIMPLES ET DIMENSION FERRERS

1 - GRAPHS DE FERRERS SYMETRIQUES ET GRAPHS A SEUIL

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple (une arête $\{x, y\}$ est notée plus simplement xy).

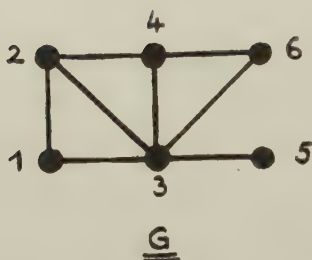
On pose $k(G) = \left| \{h \in \mathbb{N}; \exists x \in X \ d_G(x) = h\} \cup \{0\} \right| - 1$, et on appelle partition ordonnée de X associée au degré dans G, la partition $\mathcal{D}(G) = \{D_0, D_1, \dots, D_k\}$ telle que :

- D_0 est la classe des sommets isolés de G ; si G n'a pas de sommets isolés, D_0 est vide;
- si $x \in D_i$ et $y \in D_j$, $i \leq j \iff d_G(x) \leq d_G(y)$

On note $\delta_G(x)$ l'indice i tel que $x \in D_i$ et $\underline{d_i}$ le degré des sommets de D_i (on omettra la référence à G en indice à chaque qu'on pourra le faire sans risque d'ambiguïté).

Ainsi, aucune classe D_i n'est vide, sauf éventuellement D_0 , et $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_k$ est la suite des degrés dans G (après suppression de d_0 au cas où D_0 est vide).

L'exemple ci-après illustre ces définitions.



$$D_0 = \emptyset \quad d_0 = 0$$

$$D_1 = \{5\} \quad d_1 = 1$$

$$D_2 = \{1, 6\} \quad d_2 = 2$$

$$D_3 = \{2, 4\} \quad d_3 = 3$$

$$D_4 = \{3\} \quad d_4 = 5$$

$$\delta(1) = 2, \delta(2) = 3, \dots, \delta(6) = 2$$

On dit que le quadruplet (x, y, z, t) est un 4-cycle-alterné (4-c-a) de G lorsque x, y, z et t sont quatre sommets distincts de G tels que $xy, zt \in E$ et $yz, xt \notin E$.

Pour tous sommets $x, y \in X$, on pose $x \preceq_G y$ lorsque $\Gamma(x) \supseteq \Gamma(y) - \{x\}$. On vérifie aisément que la relation $\preceq_G$ est un préordre sur X .

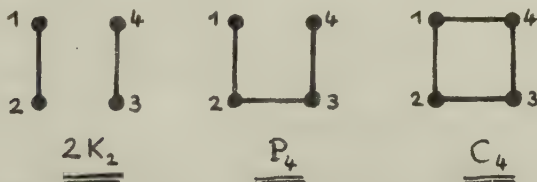
On note $\mathcal{Y}$ la classe des graphes obtenus à partir du graphe vide $(\emptyset, \emptyset)$ en appliquant récursivement les règles suivantes :

(s_1) : ajouter à $G = (X, E) \in \mathcal{Y}$ un sommet isolé z
(i.e. $G' = (X \cup \{z\}, E)$)

(s_2) : ajouter à $G = (X, E) \in \mathcal{Y}$ un sommet dominant z
(i.e. $G' = (X \cup \{z\}, E \cup \{zx; x \in X\})$)

Le graphe G est un graphe scindé lorsqu'on peut partitionner X en X_1 et X_2 de sorte que X_1 soit un stable pour G et X_2 engendre une clique de G . On le note alors $G = (X_1, X_2, E)$ (on remarque que la bipartition de X n'est pas nécessairement unique).

On note respectivement $2K_2$, P_4 et C_4 les graphes donnés par la figure ci-dessous :



Enfin, si $G = (X, U)$ est un graphe symétrique, on appelle graphe simple associé à G le graphe simple $\mathcal{A}(G) = (X, E_G)$ où $E_G = \{xy; xy, yx \in U\}$, et on remarque que $\mathcal{A}(G)$ détermine G aux boucles près.

Ainsi, pour tous graphes G et H , on a $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}(H)$ ssi $G^I = H^I$, et, si $G = (X, E)$ est un graphe simple, alors $|\mathcal{A}^{-1}(G)| = 2^{n(G)}$.

Le résultat suivant permet de caractériser les graphes simples associés aux graphes symétriques satisfaisant chacune des propriétés caractéristiques des graphes de Ferrers énoncées par le théorème 1 page I-5 :

THEOREME 1

Pour $i=1,2,3,4,5,6,7,7\text{bis},8$ on a les deux propriétés suivantes :

- (a) : si G est un graphe symétrique satisfaisant la condition (Fi) , alors $\mathcal{A}(G)$ satisfait la condition (Si)
- (b) : si G est un graphe simple satisfaisant la condition (Si) , alors il existe un graphe $G' \in \mathcal{A}(G)$, donc symétrique, et satisfaisant la condition (Fi)

où les conditions (Fi) sont celles du théorème 1 page I - 5 et les conditions (Si) sont les conditions suivantes, où $G = (X,E)$ désigne un graphe simple :

(S₁) : il existe une application $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel t tels que S soit un stable pour G ssi on a $\sum_{x \in S} v(x) \leq t$

(S₂) : il existe une application $v : X \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel t tels que

$$\forall x,y \in X \quad xy \in E \Leftrightarrow v(x) + v(y) > t$$

(S₃) : $\forall x,y \in X \quad xy \in E \Leftrightarrow \delta(x) + \delta(y) > k(G)$

(S₄) : si $k(G) \neq 0$, alors :

$$(\alpha) \quad d_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} = d_{\lfloor k/2 \rfloor} + |D_{\lfloor k/2 \rfloor}| - 1$$

(β) pour tout i tel que $0 \leq i < k(G)$ et $i \neq \lfloor k/2 \rfloor$,

$$\text{on a } d_{i+1} = d_i + |D_{k(G)-i}|$$

(S5) : G est un graphe scindé $G = (X_1, X_2, E)$ et il

existe un ensemble totalement ordonné $(O, \leq)$

et une application $f : X \longrightarrow O$ tels que

$$\forall x \in X_1 \quad \forall y \in X_2 \quad xy \in E \iff f(x) \leq f(y)$$

(S6) : $G \in \mathcal{Y}$

(S7) : G n'admet aucun sous-graphe isomorphe à $2K_2$,

P_4 ou C_4

(S7bis) : G n'admet aucun 4-a-c

(S8) : le préordre γ_G est total

démonstration :

tout au long de cette démonstration, afin d'alléger les notations, lorsque nous démontrerons le point (i)-(a), G désignera toujours un graphe (X, U) , auquel cas $\mathcal{A}(G) = (X, E)$, et, lorsque nous démontrerons le point (i)-(b), G désignera toujours le graphe simple (X, E) et, si $G' \in \mathcal{A}^{-1}(G)$, on supposera $G' = (X, U)$;

de même, nous omettrons d'indiquer G , G' ou $\Lambda(G)$ en référence lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible : par exemple, k^+ et k désignerons respectivement

- $k^+(G)$ et $k(\Lambda(G))$, si nous prouvons un point (i)-(a)
- $k^+(G')$ et $k(G)$, si nous prouvons un point (i)-(b)

(1)-(a) : la remarque 1-b page I-15 montre qu'on peut, sans perte de généralité, supposer que $v^+ = v^-$; posons alors $v = v^+$;

- supposons que $S \subseteq X$ ne soit pas un stable pour $\Lambda(G)$;
alors il existe $x, y \in S$ tels que $x \neq y$ avec $xy, yx \in U$;
on en déduit que $\sum_{x \in S} v(x) > v(x) + v(y) = v^+(x) + v^-(y) > t$;

- supposons que S soit un stable pour $\Lambda(G)$ tel que

$$\sum_{x \in S} v(x) > t ; \text{ soit } S' \subset S \text{ tel que } \sum_{x \in S'} v(x) \leq t, \text{ et}$$

supposons S' maximal pour ces propriétés ;

$$\text{soit alors } x \in S - S' ; \text{ on a } v^+(x), \sum_{x \in S'} v^-(x) \leq t$$

$$\text{et } \{x\} \cap S' = \emptyset, \text{ d'où on déduit que } \sum_{x \in S' \cup \{x\}} v(x) =$$

$$v^+(x) + \sum_{x \in S'} v^-(x) \leq t, \text{ ce qui contredit la maximalité de } S' ;$$

(1)-(b) : si G , v et t satisfont la condition (S1), alors

il est clair que G , v et t satisfont la condition (S2) ;

comme il est montré au point (2)-(b), il existe $G' \in \Lambda^{-1}(G)$ satisfaisant la condition (F2), et donc la condition (F1) (cf. thm 1 p. I-5); il ne nous pas semblé que G, v et t induisent plus directement des v^+, v^-, t' et $G' \in \Lambda^{-1}(G)$ satisfaisant la condition (F1);

(2)-(a) : soit $v = v^+ + v^-$ et $t' = 2t$; alors il est clair que $(G), v$ et t' satisfont la condition (S2);

(2)-(b) : soient $v^+ = v^- = v$ et soit $G' \in \Lambda^{-1}(G)$ tel que, pour tout $x \in X$, $xx \in U$ ssi $2v(x) > t$; alors il est clair que G', v^+, v^- et t satisfont la condition (F2);

(3)-(a) : il nous suffit de montrer que pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, $\delta(x) + \delta(y) > k \iff \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq k^+$, et on remarque que, si $\delta^+(x) \leq \lfloor k^+/2 \rfloor$, alors $d(x) = d^+(x)$;

• si $d^+ \lfloor k^+/2 \rfloor + 1 > d^+ \lfloor k^+/2 \rfloor + 1$, alors $k = k^+$ et $D_i = D_i^+$ pour tout $i \in [0, k]$; le résultat est alors évident;

• supposons que $d^+ \lfloor k^+/2 \rfloor + 1 = d^+ \lfloor k^+/2 \rfloor + 1$; alors, si $\delta^+(x) = \lfloor k^+/2 \rfloor$ et $\delta^+(y) = \lfloor k^+/2 \rfloor + 1$, on a

$$\bullet \text{ si } k \text{ est pair, } \Gamma^+(y) - \Gamma^+(x) = D_{k^+/2}^+$$

$$\bullet \text{ si } k \text{ est impair, } \Gamma^+(y) - \Gamma^+(x) = D_{\lfloor k^+/2 \rfloor}^+$$

donc, dans tous les cas, on a $|\bar{D}_{\lfloor k^+/2 \rfloor}^+| = 1$ (*);

d'autre part, $D_i = D_i^+$ pour tout $i \in [0, [k^+ - 2]]$.

$D_{[k^+/2]} = D_{[k^+/2]}^+ \cup D_{[k^+/2]+1}^+$, et $D_i = D_{i-1}^+$ pour $i \in] [k^+/2], k^+ [$, avec, par conséquent, $k = k^+ - 1$;

- supposons que $\delta(x) + \delta(y) > k$ et que

$$\delta^+(x) + \delta^-(y) \leq k^+;$$

alors $k^+ \geq \delta^+(x) + \delta^-(y) \geq \delta(x) + \delta(y) > k = k^+ - 1$;

donc $k^+ = \delta^+(x) + \delta^-(y) = \delta(x) + \delta(y)$, donc

$\delta^+(x) = \delta(x)$ et $\delta^-(y) = \delta(y)$, avec en particulier

$\delta^+(x), \delta^-(y) \leq [k^+/2]$; par conséquent, $\delta^+(x) = \delta^-(y)$

$= [k^+/2]$, d'où on déduit que k^+ est pair et que

$x, y \in D_{k^+/2}^+$, ce qui contredit (*);

- supposons que $\delta(x) + \delta(y) \leq k$ et que

$$\delta^+(x) + \delta^-(y) > k^+;$$

alors $k^+ < \delta^+(x) + \delta^-(y) \leq \delta(x) + \delta(y) + 2 = k^+ + 1$;

donc $\delta^+(x) + \delta^-(y) = \delta(x) + \delta(y) + 2 = k^+ + 1$;

un raisonnement analogue à celui du cas précédent

montre que $\delta^+(x), \delta^-(y) = [k^+/2] + 1$, d'où on déduit

que k^+ est impair et que $x, y \in D_{[k^+/2]+1}^+$, ce qui

contredit (*);

- (3)-(b) : soit $G' \in \mathcal{L}^{-1}(G)$ tel que, pour tout $x \in X$, on ait $xx \in U$ ssi $2 \delta(x) > k$; alors $k^+ = k^- = k$, $\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^- = \mathcal{D}$, et le résultat est évident;

(4)-(a) : supposons que G satisfasse la condition (F4)

alors que $\Lambda(G)$ ne satisfait pas la condition (S4),

et que k^+ soit minimum pour ces propriétés;

comme $k^+ > 0$ (car sinon $\Lambda(G)$ satisfait trivialement la condition (S4)), on a $d_1^+ = |D_{k^+}^+|$ et on vérifie aisément

que $d_{k^+}^+ = \sum_{i=1}^{k^+} |D_i^+|$; on a également $k^+ > 1$ (car sinon

G est constitué du graphe complet symétrique sur D_1^+ , augmenté des sommets isolés de D_0^+ , auquel cas on vérifie aisément que $\Lambda(G)$ satisfait la condition (S4)), et on en déduit :

• si $x \in D_{k^+}^+$, alors $\Gamma^+(x) = X - D_0^+$

• si $x \in D_1^+$, alors $\Gamma^+(x) = D_{k^+}^+$

soit $Y = X - D_0^+ - D_{k^+}^+$ et $H = G[Y]$ (on a bien $Y \neq \emptyset$); la partition ordonnée associée au dde dans H est donc

$\mathcal{D}^+(H) = \{D_0^+(H), \dots, D_{k^+(H)}^+(H)\}$, où $k^+(H) = k^+ - 2$ et, pour $i \in [0, k^+(H)]$, $D_i^+(H) = D_{i+1}^+$;

on vérifie alors que H satisfait la condition (F4) : par exemple, pour $i \in [0, k^+(H)[$, on a

$$\begin{aligned} d_{i+1}^+(H) &= d_{i+2}^+ - |D_{k^+}^+| = d_{i+1}^+ + |D_{k^+ - i - 1}^+| - |D_{k^+}^+| = \\ d_i^+(H) + |D_{k^+ - i - 2}^+(H)| &= d_i^+(H) + |D_{k^+ - i}^+(H)|; \end{aligned}$$

donc $\Lambda(H)$ satisfait la condition (S4); or on obtient

$\Lambda(G)$ en lui ajoutant d'abord les sommets de $D_{k^+}^+$ comme sommets dominants, puis les sommets de D_0^+ comme sommets isolés;

posons $k(\mathcal{A}(H)) = k'$, $d_i(\mathcal{A}(H)) = d'_i$ et $D_i(\mathcal{A}(H)) = D'_i$;
comme $D'_0 = D'_1 \neq \emptyset$, pour $i \in [0, k']$, on a $D'_i = D_{i+1}$ et
 $d'_i = d_{i+1} - |D_k|$, et $k' = k - 2$; alors :

• $\mathcal{A}(G)$ satisfait le point (α) de la condition (S4) :

$$\begin{aligned} d_{\lfloor k/2 \rfloor + 1} &= d'_{\lfloor k/2 \rfloor} + |D_k| = d'_{\lfloor k'/2 \rfloor + 1} + |D_k| = \\ d'_{\lfloor k'/2 \rfloor} + |D'_{\lfloor k'/2 \rfloor}| - 1 + |D_k| &= d_{\lfloor k/2 \rfloor} + |D_{\lfloor k/2 \rfloor}| - 1 \end{aligned}$$

• $\mathcal{A}(G)$ satisfait le point (β) de la condition (S4) :

on a $d_i = |D_k|$, $d_k = d'_k$, $|D'_0| = d_{k-1} + |D_1|$, et,

si $1 \leq i < k-1$ et $i \neq \lfloor k/2 \rfloor$ (donc $i-1 \neq \lfloor k'/2 \rfloor$), on a

$$d_{i+1} = d'_i + |D_k| = d'_{i-1} + |D'_{k'-i+1}| + |D_k| = d_i + |D_{k-i}|$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\mathcal{A}(G)$;

(4)-(b) : définissons $G' \in \mathcal{A}^{-1}(G)$ comme en (3)-(b) ; alors

$\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ avec $d^+(x) = d(x) + 1$ si $\delta(x) \geq \lfloor k/2 \rfloor$ et

$d^+(x) = d(x)$ sinon ; le résultat en découle immédiatement ;

(5)-(a) : soient $X_1 = \{x \in X ; f_1(x) > f_2(x)\}$ et

$X_2 = \{x \in X ; f_1(x) \leq f_2(x)\}$; posons alors $f(x) = f_1(x)$

pour tout $x \in X_1$ et $f(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in X_2$;

• X_1 est un ensemble stable pour $\mathcal{A}(G)$, sinon il existe

$x, y \in X_1$ tels que $f_1(y) \leq f_2(x) < f_1(x) \leq f_2(y) < f_1(y)$;

• X_2 engendre une clique de $\mathcal{A}(G)$, sinon il existe $x, y \in X_2$

tels que $f_2(y) < f_1(x) \leq f_2(x) < f_1(y) \leq f_2(y)$;

- pour tout $x \in X_1$ et tout $y \in X_2$, $xy \in E$ ssi $f_1(x) \leq f_2(y)$,
c'est-à-dire ssi $f(x) \leq f(y)$;

(5)-(b) : soit $G' \in \mathcal{L}^{-1}(G)$ tel que, pour tout $x \in X$,

$xx \in U$ ssi $x \in X_2$; soit $f(X) = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ avec

$a_1 < a_2 < \dots < a_p$ et soit $(\theta', \leq)$ un ordre total tel que

$\{b_1, b_2, \dots, b_p\} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subseteq \theta'$ avec $b_p < b_{p-1} < \dots < b_1 < a_1$;

pour tout $x \in X$ avec $f(x) = a_i$, posons $f_1(x) = a_i$ (resp.

$f_2(x) = a_i$) et $f_2(x) = b_i$ (resp. $f_1(x) = b_i$) si $x \in X_1$

(resp. $x \in X_2$); soient $x, y \in X$ avec $f(x) = a_i$ et $f(y) = a_j$;

1^{er} cas : $x \in X_1, y \in X_1$

alors $xy \notin U$; or, d'autre part, $f_1(x) = a_i > b_j = f_2(y)$;

2^{ème} cas : $x \in X_1, y \in X_2$

alors $xy \in U \iff xy \in E \iff f(x) \leq f(y) \iff a_i \leq a_j$

$\iff f_1(x) \leq f_2(y)$;

3^{ème} cas : $x \in X_2, y \in X_1$

alors $xy \in U \iff xy \in E \iff f(x) > f(y) \iff a_i > a_j$

$\iff b_i \leq b_j \iff f_1(x) \leq f_2(y)$;

4^{ème} cas : $x \in X_2, y \in X_2$

alors $xy \in U$; or, d'autre part, $f_1(x) = b_i < a_j = f_2(y)$;

θ', f_1, f_2 et $(\theta', \leq)$ satisfont donc la condition (F5);

(6) : soient $G = (X, U)$ un graphe symétrique et $H = (X, F)$ un graphe simple tels que $H = \mathcal{L}(G)$;
 pour $i \in \{1, 2\}$, il est clair que si G' se déduit de G par ajout du sommet z en appliquant la règle (f_1) nécessairement avec $A = \emptyset$ si $i=1$ et $A = X$ si $i=2$ (cf. p. I - 4), et si H' se déduit de H par ajout du sommet z en appliquant la règle (si) , alors $H' = \mathcal{L}(G')$;
 (6)-(a) et (6)-(b) se déduisent aisément de cette constatation;

(7) : voir (7bis), les conditions étant trivialement équivalentes;

(7bis)-(a) : il est clair que si $\mathcal{L}(G)$ admet un 4-c-a, alors G admet un 4-a-c-a;

(7bis)-(b) : posons

$$X_1 = \{x \in X; \exists yz \in E \mid \{x, y, z\} = 3 \text{ et } xy, xz \notin E\}$$

$$X_2 = \{x \in X - X_1; \exists y \in X - X_1 \text{ } x \neq y \text{ et } xy \notin E\}$$

$$X_3 = X - X_1 - X_2$$

et soit $G' \in \mathcal{L}^{-1}(G)$ tel que, pour tout $x \in X$, $xx \in U$ ssi $x \in X_3$;

- G' n'admet aucun 4-a-c-a de type 4, sinon il est clair que G admet un 4-c-a;

- s'il existe trois sommets distincts $x, y, z \in X$ tels que $yz \in U$ tandis que $yx, xz \notin U$, alors $x \in X_1$ et $xx \notin U$; donc G' n'admet aucun 4-a-c-a de type 3" (cf. p. 1-3);

- supposons qu'il existe trois sommets distincts $x, y, z \in X$ tels que $yz \notin U$ tandis que $yx, xz \in U$;

(α) $x \notin X_1$, sinon il existe une arête $tt' \in E$ telle que $xt, xt' \notin E$ (en particulier y, z, t, t' sont tous distincts) et, si $zt \in E$, alors (x, y, z, t) est un 4-c-a de G , tandis que si $zt \notin E$, alors (x, z, t, t') est un 4-c-a de G ;

(β) $x \notin X_2$, sinon il existe $t \in X - X_1$ tel que $xt \notin E$ (en particulier $t \neq x, y, z$), donc $tz \in E$, puisque $t \notin X_1$, auquel cas (x, y, z, t) est un 4-c-a de G ;

en conséquence, $x \in X_3$, donc $xx \in U$ et, on en déduit que G' n'admet aucun 4-a-c-a de type 3' ;

- supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et $xy, yx \in U$ tandis que $xx \notin U$; alors $x \in X_1 \cup X_2$;

(α) supposons que $x \in X_1$;
alors il existe $tt' \in E$, avec $|\{x, t, t'\}| = 3$, telle que $xt, xt' \notin E$ (en particulier $y \neq t, t'$) et on en déduit que $yt, yt' \in E$, sinon (x, y, t, t') ou (x, y, t', t) est un 4-c-a de G ;

$\rightarrow y \notin X_1$, sinon il existe une arête $zz' \in E$ telle que $yz, yz' \notin E$ (en particulier, $z, z' \notin \{x, y, t, t'\}$), auquel cas, si $zt \in E$, alors (x, y, z, t) est un 4-c-a de G , et si $zt \notin E$, alors (y, t, z, z') est un 4-c-a de G ;

$\rightarrow y \notin X_2$, sinon il existe $z \in X - X_1$ tel que $z \neq y$ et $yz \notin E$ (en particulier, $z \neq x, t, t'$); donc $zt \in E$, sinon $z \in X_1$, et (x, y, z, t) est un 4-c-a de G ;

(β) supposons que $x \in X_2$;

alors il existe $t \in X - X_1$ avec $t \neq x$ et tel que $xt \notin E$; donc $yt \in E$, sinon $t \in X_1$, et, comme nous l'avons montré au $\bullet$ précédent, $y \in X_3$;

donc, dans tous les cas, $y \in X_3$, donc $yy \in U$, et, par conséquent, G' n'admet aucun 4-a-c-a de type 2";

- $\bullet$ supposons qu'il existe $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et $xy, yx \notin U$ tandis que $xx \in U$; alors $x \in X_3$, en particulier $x \in X - X_1$, et donc $y \in X_1 \cup X_2$ (si $y \notin X_1$, alors $y \in X_2$), par conséquent $yy \notin U$, et G' n'admet aucun 4-c-a de type 2';

(8)-(a) : si $x, y \in X$ avec $x \neq y$ et $\Gamma^+(x) \subseteq \Gamma^+(y)$, alors $\Gamma^-(x) = \Gamma^-(y) - \{x\} \subseteq \Gamma^-(y) \subseteq \Gamma^-(y) \cup \{y\}$; $\gamma_{\Lambda(G)}$ est donc bien un préordre total;

(8)-(b) : soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de sorte que, pour tout $i \in]1, n]$, $\Gamma(x_{i-1}) \subseteq \Gamma(x_i) \cup \{x_i\}$, et soit $G' \in \mathcal{A}^1(G)$ tel que, pour tout $i \in]1, n]$, $x_i x_{i-1} \in E$ ssi $x_i \in \Gamma(x_{i-1})$; alors, pour tout $i \in]1, n]$, $\Gamma(x_{i-1}) \subseteq \Gamma^+(x_i)$ et, de plus, si $x_{i-1} \in \Gamma^+(x_{i-1})$, alors $i-1 > 1$ et $x_{i-1} \in \Gamma(x_{i-2}) \subseteq \Gamma(x_i) \cup \{x_i\}$; donc $x_{i-1} \in \Gamma(x_i) \subseteq \Gamma^+(x_i)$; comme on a $\Gamma(x_i) \subseteq \Gamma^+(x_i) \subseteq \Gamma(x_i) \cup \{x_i\}$ pour tout $i \in]1, n]$, on en déduit que $\Gamma^+(x_{i-1}) \subseteq \Gamma^+(x_i)$ pour tout $i \in]1, n]$ et que, par conséquent, γ_G^+ est un préordre total.



Du théorème 1 ci-dessus et du théorème 1 page I - 5 caractérisant les graphes de Ferrers, on déduit immédiatement :

THEOREME 2

Pour un graphe simple $G = (X, E)$, les conditions (Si) du théorème 1 précédent sont équivalentes.

Ce qui permet de poser :

DEFINITION

Les graphes à seuil sont les graphes simples satisfaisant les conditions (S1) du théorème 1 page VI - 4 .

V. Chvátal et P.L. Hammer, qui ont introduit les graphes à seuil [CHV-HAM], ont montré l'équivalence des conditions (S1), (S2), (S5), (S6), (S7), (S7bis), et (S8). M.C. Golumbic [GO] a montré l'équivalence des conditions (S1), (S2), (S3) et (S4), et P.B. Henderson et Y. Zalcstein [HEN-ZAL] ont montré l'équivalence des conditions (S1), (S2), (S3), (S4) et (S6).

REMARQUE 1

Compte tenu de la remarque 1-b page I - 15, on peut exiger, dans les conditions (S1) et (S2) du théorème 1 page VI - 4 , que v soit une application de X dans $\mathbb{N}^+$ et que $t \in \mathbb{N}^+$ (conditions qui caractérisent ce que V. Chvátal et P.L. Hammer appellent dans un premier temps les graphes fortement à seuil [CHV-HAM]).

Le théorème 1 page VI - 4 permet également de retrouver comme cas particulier des propriété 3 page I - 24 et propriété 1 page I - 23 les deux résultats suivants :

PROPRIETE 1 [CHV-HAM]

Un graphe simple est un graphe à seuil ssi
son complémentaire est un graphe à seuil.

PROPRIETE 2 [CHV-HAM]

Tout sous-graphe d'un graphe à seuil est un
graphe à seuil.

Revenons au théorème 1 page VI - 4 : pour prouver les parties (b) de ce théorème, nous avons, étant donné un graphe simple G satisfaisant chaque condition (Si), donc un graphe à seuil, construit arbitrairement un graphe $G' \in \mathcal{A}^{-1}(G)$ et satisfaisant la condition (Fi), donc un graphe de Ferrers.

Ceci soulève la question de savoir quels sont, pour un graphe à seuil G donné, les graphes $G' \in \mathcal{A}^{-1}(G)$ qui sont des graphes de Ferrers.

LEMME

Si G est un graphe à seuil tel que $n(G) > 1$, alors

$$\left\lfloor \frac{D_{[k(G)/2]}(G)}{2} \right\rfloor \geq 2$$

démonstration :

si $k = k(G) = 0$, alors $D_{\lceil k/2 \rceil} = X$, et le résultat est trivial;
 sinon, $D_{\lfloor k/2 \rfloor}$ et $D_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}$ sont deux classes distinctes de la
 partition ordonnée $\mathcal{D}(G)$; en particulier, on a $d_{\lfloor k/2 \rfloor} \neq d_{\lfloor k/2 \rfloor + 1}$
 et, par exemple, le point (α) de la condition (S4) du théorème 1
 page VI - 4 permet de conclure.

Nous pouvons alors montrer le résultat suivant :

THEOREME 3

Soit G un graphe à seuil et soit $G' = (X, U)$ un
 graphe tel que $\mathcal{A}(G') = G$.

Alors G' est un graphe de Ferrers ssi il
 satisfait les trois conditions suivantes :

- (1) si $\delta_{\alpha}(x) < \lceil k(G)/2 \rceil$, alors $xx \notin U$
- (2) si $\delta_{\alpha}(x) > \lceil k(G)/2 \rceil$, alors $xx \in U$
- (3) si $k(G)$ est pair, alors $xx \notin U$ pour tout sommet
 $x \in D_{k(G)/2}$, sauf éventuellement pour un sommet
 de cette classe;
 si $k(G)$ est impair, alors $xx \in U$ pour tout sommet
 $x \in D_{\lceil k(G)/2 \rceil}$, sauf éventuellement pour un sommet
 de cette classe.

démonstration :

- soit $G = (X, E)$ un graphe à seuil et soit $G' = (X, U) \in \mathcal{A}^{-1}(G)$;
on note k le nombre $k(G)$ et on pose $\delta = \delta_G$;

1^{er} cas : supposons k pair

- (3) : si $x, x' \in D_{k/2}$ et si $x \neq x'$, on a $xx', x'x \notin U$, car
 $\delta(x) + \delta(x') = k$ et donc $xx' \notin E$; le quadruplet
 (x, x, x', x') ne peut être un 4-a-c-a de G' , et donc
 $xx \notin U$ ou $x'x' \notin U$;

donc $D_{k/2}$ ne peut posséder qu'un sommet bouclé au maximum ;

d'autre part, d'après le lemme précédent, on a

$|D_{k/2}| \geq 2$; donc $D_{k/2}$ possède au moins un sommet non bouclé ; soit x_0 un tel sommet ;

- (2) : soit $x \in X$ tel que $\delta(x) > k/2$; alors $\delta(x_0) + \delta(x) > k$,
donc $xx_0, x_0x \in U$; comme le quadruplet (x, x_0, x_0, x) ne
peut être un 4-a-c-a de G' , on a nécessairement $xx \in U$;

- (1) : soit $x \in X$ tel que $\delta(x) \leq k/2$; alors $k/2 + 1 \leq k$,
et il existe $y \in D_{(k/2)+1}$; on a alors $xy, yx \in U$,
car $\delta(x) + \delta(y) \leq k$ et $x \neq y$; d'autre part, $yy \in U$
en vertu du point (2) précédent ;
comme le quadruplet (x, x, y, y) ne peut être un 4-a-c-a
de G' , on a nécessairement $xx \in U$;

2^{ème} cas : supposons k impair et posons $h = \lceil k/2 \rceil$

(3) : si $x, x' \in D_h$ et si $x \neq x'$, on a $\delta(x) + \delta(x') = k+1$,
donc $xx', x'x \in U$; le quadruplet (x, x', x', x) ne
peut être un 4-a-c-a de G' , donc $xx \in U$ ou $x'x' \in U$;
donc D_h ne peut posséder qu'un sommet non bouclé
au plus;
d'autre part, d'après le lemme précédent, $|D_h| \geq 2$;
donc D_h possède au moins un sommet bouclé; soit x_0
un tel sommet;

(1) : soit $x \in X$ tel que $\delta(x) < h$; alors $\delta(x_0) + \delta(x) \leq k$,
avec $x \neq x_0$, donc $xx_0, x_0x \notin U$; le quadruplet
 (x_0, x_0, x, x) ne peut être un 4-a-c-a de G' , et donc
 $xx \notin U$;

(2) : soit $x \in X$ tel que $\delta(x) > h$; alors $h \geq 2$ et il existe
 $y \in D_{h-1}$ avec $yy \notin U$ en vertu du point (1) précédent;
d'autre part, $xy, yx \in U$ car $\delta(x) + \delta(y) > k$, avec
 $x \neq y$; le quadruplet (x, y, y, x) ne peut être un 4-a-c-a
de G' , donc $xx \in U$;

● réciproquement, soit $G' = (X, U) \in \Lambda^{-1}(G)$ et satisfaisant
les conditions (1), (2) et (3). et posons $h = \lceil k/2 \rceil$;

supposons que G' admette un 4-a-c-a λ ;

- a) si λ est de type 4, λ est également un 4-c-a de G ,
ce qui contredit le fait que G est un graphe à seuil;
- b) si λ est de type 3', soit par exemple $\lambda = (x, z, y, y)$
avec x, y, z tous distincts et $xz, yy \in U$ et $xy, yz \notin U$; en
particulier, $\delta(y) \geq h$;
- si k est pair, on a $\delta(x), \delta(z) \leq h$, ce qui
contredit $xz \in U$;
 - si k est impair, on a $\delta(x), \delta(z) < h$, ce qui
contredit encore $xz \in U$;
- c) si λ est de type 3'', soit par exemple $\lambda = (x, y, y, z)$
avec x, y, z tous distincts et $xy, yz \in U$ et $yy, xz \notin U$; en
particulier, $\delta(y) \leq h$;
- si k est pair, on a $\delta(x), \delta(z) > h$, ce qui
contredit $xz \notin U$;
 - si k est impair, on a $\delta(x), \delta(z) \geq h$, ce qui
contredit encore $xz \notin U$;
- d) si λ est de type 2', soit par exemple $\lambda = (x, x, y, y)$
avec $x \neq y$, $xx, yy \in U$ et $xy, yx \notin U$;
- si k est pair, $\delta(x) + \delta(y) \geq h + (h+1) = k+1$,
ce qui contredit $xy, yx \notin U$;
 - si k est impair, $\delta(x), \delta(y) \geq h$, ce qui contredit
encore $xy, yx \notin U$;

- e) si λ est de type $2'$, soit par exemple $\lambda = (x, y, y, x)$ avec $x \neq y$, $xy, yx \in U$ et $xx, yy \notin U$;
- si k est pair, $\delta(x), \delta(y) \notin h$, ce qui contredit $xy, yx \in U$;
 - si k est impair, $\delta(x) + \delta(y) \leq (h-1) + h = k$, ce qui contredit encore $xy, yx \in U$.



On déduit immédiatement du théorème 3 ci-dessus :

COROLLAIRE

Pour tout graphe à seuil G , avec $n(G) \gg 1$,
il existe $1 + \lfloor D_{\lfloor k(G)/2 \rfloor} \rfloor$ graphes de Ferrers G'
appartenant à $\mathcal{A}^{-1}(G)$.

REMARQUE 2

Compte tenu du lemme page VI - 17, dès que $n(G) > 1$, on a $\lfloor D_{\lfloor k(G)/2 \rfloor} \rfloor \geq 2$, et il existe donc au moins trois graphes de Ferrers G' tels que $\mathcal{A}(G') = G$.

D'autre part, on est assuré de construire un graphe à seuil en procédant de la façon suivante :

soit X un ensemble de cardinal supérieur ou égal à 2 ,
 et soit $P = \{X_0, \dots, X_k\}$ une partition de X où seule X_0
 est éventuellement vide, et telle que $|X_h| \geq 2$, en
 posant $h = \lceil k/2 \rceil$; on définit sur X un ensemble d'arêtes
 E de telle sorte que $xy \in E$ ssi $x \in X_i$, $y \in X_j$ et
 $i+j > k$; du fait que $|X_h| \geq 2$, $d(x) = d(y)$ ssi x et y
 sont dans une même classe X_i , et la partition P est
 la partition ordonnée associée au degré dans le graphe
 simple $G = (X, E)$: G satisfait donc la condition (S3)
 du théorème 1 page VI - 4 ;

On en déduit aisément, en fixant $k \geq 1$, $|X_i| \geq 1$
 pour $i \in [1, k] - \{h\}$, et $|X_h| \geq 2$, qu'il existe des graphes
 à seuil G , avec $n(G) \geq 2$, tels qu'il n'existe que trois
 graphes de Ferrers $G' \in \mathcal{L}^{-1}(G)$, ou bien, avec $n(G) \geq 3$,
 et en fixant $k = 2$, $|X_2| = 1$, $|X_0| = 0$ et $|X_1| = n(G) - 1$,
 tels qu'il existe $n(G)$ graphes de Ferrers $G' \in \mathcal{L}^{-1}(G)$.

2 - DIMENSION FERRERS DES GRAPHS ET DIMENSION A SEUIL DES

GRAPHES SIMPLES

V. Chvátal et P.L. Hammer ont proposé la définition suivante [CHV-HAM] :

DEFINITION

La dimension à seuil d'un graphe simple est le nombre minimum de graphes à seuil dont il est la réunion.

Si G est un graphe simple, nous noterons ce nombre $\underline{d}_S(G)$.

Nous allons montrer que d_S généralise d_F en ce sens qu'à tout graphe G donné, on peut associer un graphe simple ayant pour dimension à seuil la dimension Ferrers de G .

Tout d'abord, on peut exprimer la dimension Ferrers en termes de graphes simples bipartis.

En effet, au chapitre II, nous avons associé à tout graphe G un graphe biparti $B(G)$ tel que $d_F(G) = d_F(B(G))$ (cf. pté 1 p. II - 6).

Comme $d_F(G) = d_F(G^-)$ (cf. thm p. II-2) et que $B(G^-) = (B(G))^-$, il apparaît que l'orientation de $B(G)$ n'est pas indispensable à la détermination de $d_F(G)$.

Appelons graphe simple biparti associé au graphe $G = (X, U)$ le graphe simple $B_s(G)$ défini, à un isomorphisme près, de la façon suivante :

soient respectivement $\sigma' : X \rightarrow X'$ et $\sigma'' : X \rightarrow X''$ deux bijections de X dans des ensembles X' et X'' supposés disjoints;

- $X' \cup X''$ est l'ensemble des sommets de $B_s(G)$
- $E^B = \{ \sigma'(x) \sigma''(y) ; xy \in U \}$ est l'ensemble des arêtes de $B_s(G)$

Autrement dit, $B_s(G)$ est le graphe simple biparti obtenu en remplaçant chaque arc de $B(G)$ par une arête. On le notera $B_s(G) = (X', X'', E^B)$.

Il est alors clair que (x, y, z, t) est un 4-a-c-a du graphe $G = (X, U)$ ssi $\sigma'(x) \sigma''(y), \sigma'(z) \sigma''(t) \in E^B$ et $\sigma'(x) \sigma''(t), \sigma'(z) \sigma''(y) \notin E^B$, c'est-à-dire ssi $(\sigma'(x), \sigma''(y), \sigma'(z), \sigma''(t))$ est un 4-c-a de $B_s(G)$.

Pour tout graphe simple biparti $G = (Y, Z, E)$, on dit que deux arêtes $ab, cd \in E$ sont distantes dans G lorsque $ad, cb \notin E$, et on appelle uni tout graphe simple biparti n'admettant aucune paire d'arêtes distantes.

Ainsi, à tout graphe de Ferrers G , on peut associer un graphe uni, à savoir $B_s(G)$.

Réciproquement, si $H = (Y, Z, E)$ est un graphe uni, en ajoutant éventuellement à Y ou à Z des sommets isolés afin que $|Y| = |Z|$, on a $H = B_s(G)$ pour des graphes G qui sont manifestement des graphes de Ferrers.

Cette constatation va nous permettre de caractériser les graphes unis.

Si $G = (Y, Z, E)$ est un graphe simple biparti,

- on pose $k_Y(G) = |\{h \in \mathbb{N} ; \exists y \in Y \ d(y) = h\} \cup \{0\}| - 1$
- on appelle $\mathcal{D}_Y(G) = (D_0^Y, \dots, D_{k_Y(G)}^Y)$ la partition ordonnée de Y associée au degré dans G la partition de Y satisfaisant:
 - $\forall y \in Y \quad y \in D_0^Y \iff d(y) = 0$
 - $\forall y \in D_i^Y \quad \forall y' \in D_j^Y \quad i < j \iff d(y) < d(y')$
- on note $\delta^Y(y)$ l'indice i tel que $y \in D_i^Y$ et $\underline{d}_i^Y$ le degré des sommets de D_i^Y
- on définit de façon analogue $k_Z(G)$, $\mathcal{D}_Z(G)$, δ^Z , les $\underline{D}_i^Z$ et les $\underline{d}_i^Z$ pour $0 \leq i \leq k_Z(G)$.

On appelle $\mathcal{U}$ la classe des graphes simples bipartis construits récursivement à partir de (ϕ, ϕ, ϕ) par application des règles suivantes :

- (u1) : si $G = (X, Y, E) \in \mathcal{U}$, ajouter à Y ou à Z un sommet isolé
- (u2) : si $G = (Y, Z, E) \in \mathcal{U}$, ajouter à Y (resp. à Z) un sommet adjacent à tous les sommets de Z (resp. de Y)

Le résultat suivant est une caractérisation des graphes unis :

THEOREME 1

Pour tout graphe simple biparti $G = (Y, Z, E)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (U1) : il existe une application $v : Y \cup Z \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que

a) $\forall x \in Y \cup Z \quad v(x) \leq t$

b) si $Y' \subseteq Y$, $Z' \subseteq Z$ et si $\sum_{x \in Y'} v(x), \sum_{x \in Z'} v(x) \leq t$,

alors $Y' \cup Z'$ est un ensemble stable pour G

ssi $\sum_{x \in Y' \cup Z'} v(x) \leq t$

- (U2) : il existe une application $v : Y \cup Z \rightarrow \mathbb{R}$ et un nombre $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad yz \in E \iff v(y) + v(z) > t$$

$$(U3) : \quad a) \quad k_Y(G) = k_Z(G) \\ b) \quad \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad yz \in E \iff \delta^Y(y) + \delta^Z(z) > k_Y(G)$$

$$(U4) : \quad a) \quad k_Y(G) = k_Z(G) \\ b) \quad \forall i \in [0, k_Y(G) [\quad d_{i+1}^Y = d_i^Y + \left| D_{k_Z(G)-i}^Z \right| \\ c) \quad \forall i \in [0, k_Z(G) [\quad d_{i+1}^Z = d_i^Z + \left| D_{k_Y(G)-i}^Y \right|$$

$$(U5) : \quad \text{il existe un ordre total } (\sigma, \leq) \text{ et une application} \\ f : Y \cup Z \longrightarrow \sigma \quad \text{tels que} \\ \forall y \in Y \quad \forall z \in Z \quad yz \in E \quad f(y) \leq f(z)$$

$$(U6) : \quad G \text{ est un graphe de la classe } \mathcal{U}$$

$$(U7) : \quad G \text{ n'admet aucune paire d'arêtes distantes}$$

$$(U8) : \quad \text{l'ensemble } \{ \Gamma_G(y) ; y \in Y \} \text{ est totalement ordonné} \\ \text{par inclusion}$$

$$(U8bis) : \quad \text{l'ensemble } \{ \Gamma_G(z) ; z \in Z \} \text{ est totalement} \\ \text{ordonné par inclusion}$$

démonstration :

compte tenu de la correspondance entre les graphes de Ferrers et les graphes unis, par le biais des graphes simples bipartis associés, le résultat découle immédiatement du théorème de caractérisation des graphes de Ferrers (cf. p. I - 5), sauf en ce qui concerne la condition (U6) ;

(U6) $\Rightarrow$ (U8) + (U8bis) : du fait que (U8) $\Leftrightarrow$ (U8bis), le résultat est évident par induction sur $n(G)$:

si G' a été construit à partir de $G = (Y, Z, E) \in \mathcal{U}$ en ajoutant à Y (resp. à Z) le sommet t tel que

$\Gamma_{G'}(t) = \emptyset$ ou Z (resp. ou Y), alors, par hypothèse d'induction, l'ensemble $\{\Gamma_G(x) ; x \in Y \text{ (resp. } x \in Z)\}$ est totalement ordonné par inclusion, et il en est de même de $\{\Gamma_{G'}(x) ; x \in Y \cup \{t\} \text{ (resp. } x \in Z \cup \{t\})\}$;

(U8) $\Rightarrow$ (U6) : le résultat est évident par induction sur $n(G)$:
 ou Z possède un sommet isolé x , ou il existe un sommet x de Y tel que $\Gamma_G(x) = Z$; dans les deux cas, le sous-graphe $G[(Y \cup Z) - \{x\}]$ satisfait toujours la condition (U8).



REMARQUE

Le point (U8) $\Rightarrow$ (U6) de la démonstration du théorème ci-dessus et le fait que (U8) $\Leftrightarrow$ (U8bis) montrent que, dans la définition de la classe $\mathcal{U}$, on peut, sans perte de généralité, supprimer l'un des deux ensembles Y et Z de la règle (u1) et l'autre de la règle (u2).

Le résultat suivant se déduit trivialement de la définition de la dimension Ferrers (cf. p. II - 4) :

THEOREME 2

Pour tout graphe G , $d_F(G)$ est le plus petit nombre de graphes unis dont $B_S(G)$ est l'intersection et/ou $B_S(\bar{G})$ est la réunion.

Nous allons maintenant décrire une correspondance entre les graphes unis et certains graphes à seuil.

Si H est un sous-graphe partiel d'un graphe simple biparti $G = (Y, Z, E)$, on désigne par $\underline{S_G(H)}$ le graphe $H \cup K(Z)$ où $K(Z)$ désigne la clique engendrée par Z .

Si H est un sous-graphe partiel d'un graphe scindé (cf. p. VI - 3) $G = (Y, Z, E)$, on désigne par $\underline{B_G(H)}$ le graphe simple biparti obtenu à partir de H en supprimant toutes les arêtes ayant leurs deux extrémités dans Z .

La correspondance annoncée plus haut s'exprime alors dans le résultat suivant :

PROPRIETE

Si H est un sous-graphe partiel uni d'un graphe simple biparti G , alors $S_G(H)$ est un graphe à seuil.

Réciproquement, si H est un sous-graphe partiel à seuil d'un graphe scindé G , alors $B_G(H)$ est un graphe uni.

démonstration :

- soit $H = (Y', Z', E')$ un sous-graphe partiel uni du graphe simple biparti $G = (Y, Z, E)$, et supposons que $S_G(H)$ ne soit pas un graphe à seuil;

$S_G(H)$ admet donc un 4-c-a $\lambda = (x, y, z, t)$, c'est-à-dire qu'en notant E'' l'ensemble des arêtes de $S_G(H)$, on a $xy, zt \in E''$ et $xt, zy \notin E''$;

si $x \in Y$, alors nécessairement $xy \in E'$, et donc $x \in Y'$ et $y \in Z'$; comme $yz \notin E''$, on a alors $z \notin Z$, donc $z \in Y$; alors $zt \in E'$, et on en déduit que $z \in Y'$ et $t \in Z'$; on en conclut que xy et zt sont deux arêtes distantes de H , ce qui contredit le fait que H est un graphe uni;

par raison de symétrie, on en déduit que λ n'a aucun sommet dans Y , ce qui est en contradiction avec la définition de $S_G(H)$, puisque $xt, zy \notin E''$;

- soit $H = (Y', Z', E')$ un sous-graphe partiel d'un graphe scindé $G = (Y, Z, E)$, et supposons que $B_G(H)$ ne soit pas un graphe uni; alors il existe deux arêtes xy et zt distantes dans $B_G(H)$, avec par exemple $x, z \in Y'$ et $y, t \in Z'$, et le quadruplet (x, y, z, t) est manifestement un 4-c-a de G , ce qui contredit le fait que G est un graphe à seuil.



Pour tout graphe G , appelons graphe scindé associé à G le graphe scindé $S(G) = B_G(G) \cup K(X'')$.

La propriété ci-dessus permet de déduire trivialement de la définition de la dimension à seuil (cf. p. VI - 24) et du théorème 2 page VI - 30 :

THEOREME 3

Pour tout graphe G , $d_F(G) = d_S(S(\tilde{G}))$

Les résultats de ce paragraphe, et en particulier le théorème 3 ci-dessus, ont comme conséquence fondamentale que la dimension à seuil apparaît comme une extension de la dimension Ferrers dans la mesure où la correspondance $G \rightsquigarrow S(\tilde{G})$, qu'on

Il est possible d'effectuer au moyen d'algorithmes manifestement polynomiaux, permet d'identifier la dimension Ferrers des graphes à la dimension à seuil des graphes scindés, ce qui renforce l'intérêt qu'on peut avoir à étudier la restriction de la dimension à seuil aux graphes scindés (par exemple, la caractérisation des graphes scindés de dimension à seuil égale à deux, due à T. Ibaraki et U.N. Peled [IBA-PEL] devient équivalente à celle, obtenue indépendamment, des graphes de dimension Ferrers égale à deux — cf. thm p. III-21).

Cependant, tout comme le théorème et la propriété 1 page V-2 montrent que la dimension Ferrers généralise la dimension ordre, mais que les deux notions sont "équivalentes" en un certain sens, on peut se demander s'il en va de même de la dimension à seuil vis-à-vis de la dimension Ferrers. Plus précisément :

PROBLEME 1

Pour tout graphe simple G , existe-t-il un graphe scindé $H(G)$ tel que $d_S(H(G)) = d_S(G)$?

En cas d'absence de réponse positive au problème 1, et plus généralement à la question posée, il est intéressant de restreindre à la classe des graphes scindés certains problèmes relatifs à la dimension à seuil des graphes simples en général.

[CHV-HAM]

Par exemple, V. Chvátal et P.L. Hammer ont montré que la recherche de la dimension à seuil d'un graphe simple quelconque est un problème NP-difficile au sens de R.M. Karp [KAR] (voir aussi par exemple [HOR-SAH]).

PROBLEME 2

Le problème de la recherche de la dimension à seuil d'un graphe scindé est-il encore un problème NP-difficile ?

A l'inverse, on peut généraliser certains problèmes relatifs à la dimension Ferrers des graphes.

Par exemple, à tout graphe simple G , V. Chvátal et P.L. Hammer associent un graphe noté G^* , dont les sommets sont les arêtes de G , et tel que xy et zt soient adjacents en tant que sommets de G^* ssi le quadruplet (x,y,z,t) est un 4-c-s de G (cf. [CHV-HAM]) et on pourrait appeler G^* le graphe des S -incompatibilités associé à G .

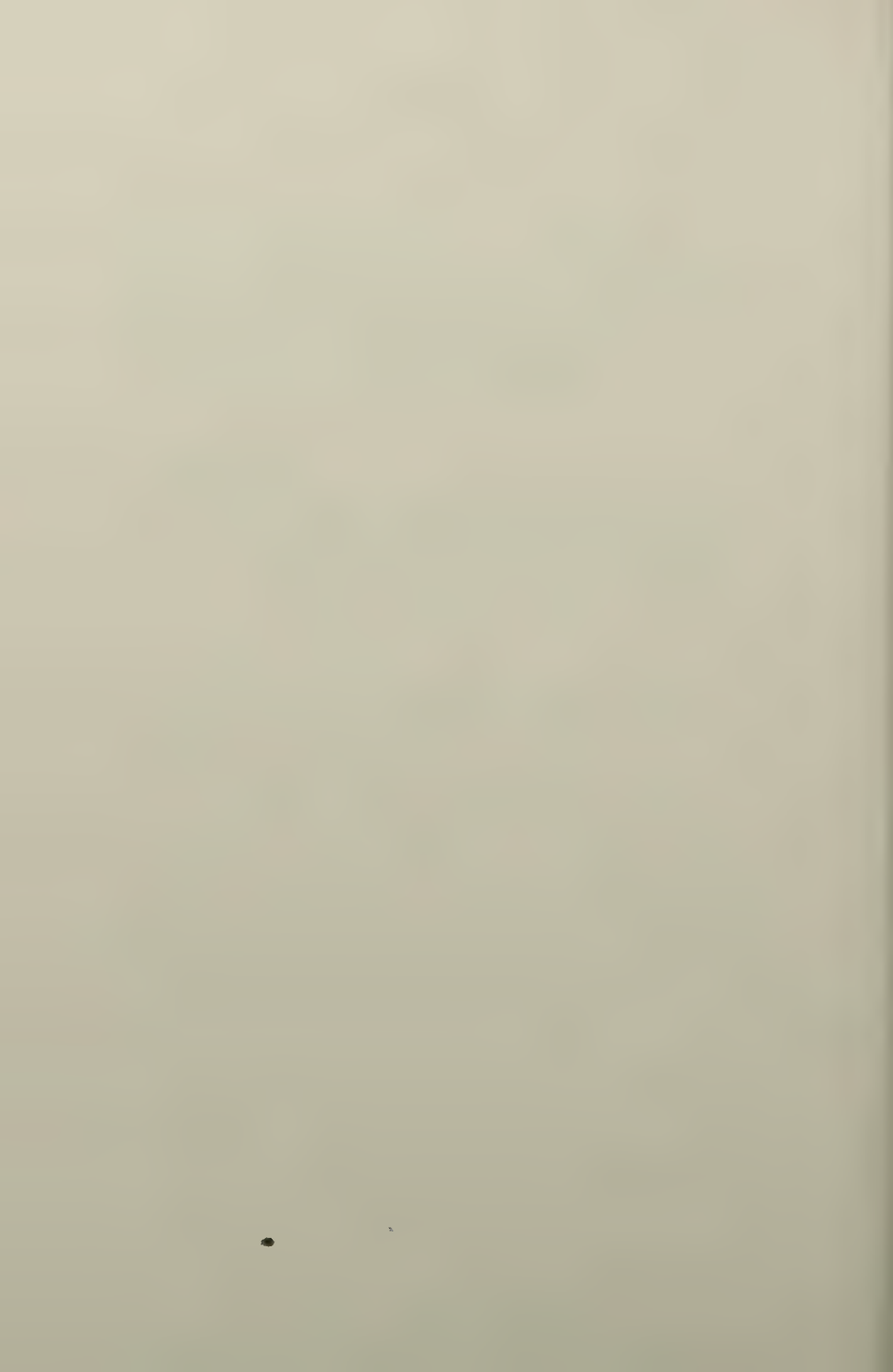
PROBLEME 3

Caractériser les graphes de S -incompatibilité.

PROBLEME 4

La recherche du nombre chromatique des graphes de S-incompatibilité est-il encore un problème NP-difficile ?

Signalons, à cet égard, que la généralisation du problème 3 page III - 26 est le problème posé dans [CHV-HAM], à savoir : existe-t-il des graphes simples G tels que $\chi(G^*) \neq d_S(G)$?



BIBLIOGRAPHIE

- [BAK-al] : K.A. Baker, P.C. Fishburn, F.S.Roberts, Partial orders of dimension 2, Networks 2 (1971), 11-28.
- [BAR-MON] : M. Barbut, B. Monjardet, Ordre et Classification, Algèbre et Combinatoire, Paris, Hachette (1970).
- [BIR] : G. Birkhoff, Lattice Theory, A.M.S., Providence, 3^{ème} ed. (1967).
- [BOG] : K.P. Bogart, Maximal dimensional partially ordered sets I. Hiraguchi's theorem, Disc. Math. 5 (1973) 21-31.
- [BOG-TRO] : K.P. Bogart, W.T. Trotter Jr., Maximal dimensional partially ordered sets II. Characterization of $2n$ -elements posets with dimension n , Disc. Math. 5 (1973), 33-43.
- [BOG-al] : K.P. Bogart, I. Rabinovitch, W.T. Trotter Jr., A bound on the dimension of interval orders, J. Comb. Th. (A) 21 (1976), 319-328.
- [BOU] : A. Bouchet, Etude combinatoire des ordonnés finis. Applications, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble (1971).

[CHV-HAM] : V. Chvátal, P.L. Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming, An. of Disc. Math. 1 (1977) 145-162.

[COG] : O. Cogis,

- a) Détermination d'un préordre total contenant un préordre et contenu dans une relation de Ferrers lorsque leur domaine commun est fini, C.R. Acad. Sc. Paris 283 A (1976), 1007-1009.
- b) Ferrers digraphs and threshold graphs, à paraître dans Disc. Math.
- c) A propos des quasi-ordres - Note, Math. Sci. Hum. (1980), 107-111.
- d) On the Ferrers dimension of a digraph, à paraître dans Disc. Math.
- e) Sur la dimension d'un graphe orienté, C.R. Acad. Sc. Paris 288 A(1979), 639-641.
- f) On a digraph dimension, à paraître dans An. of Disc. Math.
- g) A characterization of digraphs with Ferrers dimension 2, C.R. Rech., Gr. Rech. C.N.R.S. n°22, Univ. P. et M. Curie (1979).

[DIL] : R.P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, Ann. of Math. 51 (1950), 161-166.

[DUC] : A. Ducamp, Sur la dimension d'un ordre partiel, in Théorie des Graphes, Journées Internationales d'Etudes, Dunod, Paris (1967), 103-112, in Theory of Graphs, Gordon and Breach, New-York (1967).

- [DUC-FAL] : A. Ducamp, J.C. Falmagne, Composite Measurement, J. Math. Psych. 6 (1969), 359-390.
- [DUS-MIL] : B. Dushnick, E.W. Miller, Partially ordered sets, Am. J. Math. 63 (1941), 600-610.
- [FIS] : P.C. Fishburn, Intransitive indifference with unequal indifference intervals, J. Math. Psych. 7 (1970), 144-149.
- [GOL] : M.C. Golumbic, Threshold graphs and synchronizing parallel processes, Proc. 5th Hung. Comb. Coll., North-Holland, Amsterdam (1977).
- [HAB] : M. Habib, Partition en chemin des sommets, et sauts dans les graphes sans circuits, Thèse de 3^{ème} cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris (1975).
- [HAL] : E. Halphen, La notion de vraisemblance, Pub. Inst. Stat. de l'Univ. de Paris 4 (1955), 41-92.
- [HEN-ZAL] : P.B. Henderson, Y. Zalcstein, A graph theoretic characterization of the PV_{chunk} class of synchronization primitives, SIAM J. Comput. 6 (1977), 88-108.
- [HIR] : T. Hiraguchi, On the dimension of partially ordered sets, Sci. Rep. Kanazawa Univ. 1 (1951), 77-94.
- [HOR-SAH] : E. Horowitz, S. Sahni, Fundamentals of Computers Algorithms, Pitman, London (1978).
- [IBA-PEL] : T. Ibaraki, U.N. Pared, Sufficient conditions for graphs with threshold number 2, CORR 78-13, Dep. Comb. Optim., Univ. of Waterloo (1978).

- [KAR] : R.M. Karp, Reducibility among combinatorial problems in R.E. Miller and J.W. Thatcher, eds, Complexity of computer computations, Plenum Press, New-York (1972), 85-104.
- [KEL] : D. Kelly, The 3-irreducible partially ordered sets, Canad. J. Math. 29 (1977), 367-383.
- [KEL-RIV] : D. Kelly, I. Rival, Certain partially ordered sets of dimension three, J. Com. Th. (A) 18 (1975), 239-242.
- [KIM] : R. Kimble, Extremal problems in dimension theory for partially ordered sets, Ph. D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA (1967).
- [KOM] : H. Komm, On the dimension of partially ordered sets, Am. J. Math. 70 (1948), 507-520.
- [LEC-MON] : B. Leclerc, B. Monjardet, Ordres "C.A.C.", Fund. Math. 79 (1973) 11-22.
- [LOV-a1] : L. Lovasz, J. Nešetřil, A. Pultr, On a product dimension of graph, J. Comb. Th. (B) 29 (1980) 47-67.
- [LUC] : R.D. Luce, Semiorders and a theory of utility discrimination, Econometrica 24 (1956), 178-191.
- [MIR] : B.G. Mirkin, Description of some relations on the set of real-line intervals, J. Math. Psych. 9 (1972), 243-252.

- [MON] : B. Monjardet, Axiomatiques et propriétés des quasi-ordres, Math. Sci. Hum. 63 (1978), 51-82.
- [MON-JAC] : B. Monjardet, E. Jacquet-Lagrez, Modélisation des préférences et quasi-ordres, Math. Sci. Hum. 62 (1978), 5-10.
- [ORE] : O. Ore, Theory of Graphs, A.M.S. Colloq. Publs. 38, Providence (1962).
- [RAB] : I. Rabinovitch,
- a) The dimension of semiorders, J. Comb. Th. (A) 25 (1978), 50-61.
 - b) An upper bound on the "dimension of interval orders", J. Comb. Th. (A) 25 (1978), 68-71.
- [RIG.] : J. Riguet, Les relations de Ferrers, C.R. Acad. Sci. Paris 232 (1951), 1729-1730.
- [ROB] : F.S. Roberts, On non transitive indifference, J. Math. Psych. 7(1970), 243-258.
- [SCO-SUP] : D. Scott, P. Suppes, Foundational aspects of theories of measurements, J. Symb. Logic 23 (1958), 113-128.
- [SHA] : H. Sharp Jr., Enumeration of transitive step-type relations, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 22 (1971), 365-371.
- [STO-al] : S.A. Stouffer, L. Guttman, E.A. Schuman, D. Lazarsfeld, S.A. Star, J.A. Clausen, Measurement and Prediction, Princeton, New Jersey: Princeton University Press (1950).

[SZP] : E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordre partiel,
Fund. Math. 16 (1930), 386-389.

[TRO] : W.T. Trotter Jr.,

- a) Dimension of the crown, Disc. Math. 8 (1974),
85-103.
- b) Inequalities in dimension theory for posets, Proc.
Am. Math. Soc. 47 (1975), 311-316.
- c) A generalization of Hiraguchi's: inequality for
posets, J. Comb. Th. (A) 20 (1976), 114-123.

[TRO-MOO] : W.T. Trotter Jr., J.I. Moore Jr.,

- a) Characterization problems for graphs, partially
ordered sets, lattices, and families of sets, Disc.
Math. 16 (1976), 361-381.
- b) Some theorems on graphs and posets, Disc. Math. 15
(1976), 79-84.

[WIE] : N. Wiener,

- a) Contribution to the theory of relative position,
Proc. Cambridge Philos. Soc. 17 (1912-1914),
441-449.
- b) Studies in synthetic logic, Proc. Cambridge Philos.
Soc. 18 (1914-1916), 14-28.

